國立雲林科技大學 工業工程與管理所
National Yunlin University of Science & Technology　Industrial Engineering and Management

品質與可靠度工程實驗室
Quality and Reliability Engineering Lab.

Ch6 二階反應曲面法-實驗設計

授課教授： 童超塵　老師

實驗室網址 永久: http://campusweb.yuntech.edu.tw/~qre/index.htm
目前: http://140.125.88.116/QRE

議程

1. 二階反應曲面實驗設計簡介
2. 中央合成設計
3. Box-Behnken設計
4. 最佳化準則設計
5. 隨機產生設計
6. 二階反應曲面實驗設計之比較

6.1 二階反應曲面實驗設計簡介

- 二階近似函數有$1+2k+k(k-1)/2$個參數，因此至少需 $1+2k+k(k-1)/2$ 個設計點，且因有二次曲率項，所以因子至少要有三水準。如k= 2，3，4，5，6，7則至少需6，10，15，21，28，36個設計點。
- 二階反應曲面實驗可由一階反應曲面實驗擴充得到，以節省實驗成本。
- 本章將介紹四種二階反應曲面實驗設計：
  - 中央合成設計
  - Box-Behnken設計
  - 最佳化準則設計
  - 隨機產生設計

1. 中央合成設計

- **中央合成設計原理：估計係數變異之最小化**

中央合成設計由下列三種實驗構成：

1. 角點實驗：因為二階模型含二因子交互作用，因此須採解析度V以上之因子設計實驗。
2. 軸點實驗：因為二階模型含二次曲率作用，因此在軸線上距中心點α處（二端）進行實驗。又為了使實驗設計具有可旋性，須令$\alpha=\sqrt[4]{F}$ ，其中F為角點實驗之因子設計實驗數。
3. 中心點實驗：因為要使中心點之預測變異合理化，因此要有重複實驗的中心點實驗。一般而言，重複實驗次數（n_c）取3至5。

- 以2因子與3因子為例，其中央合成設計的實驗點分佈如下圖

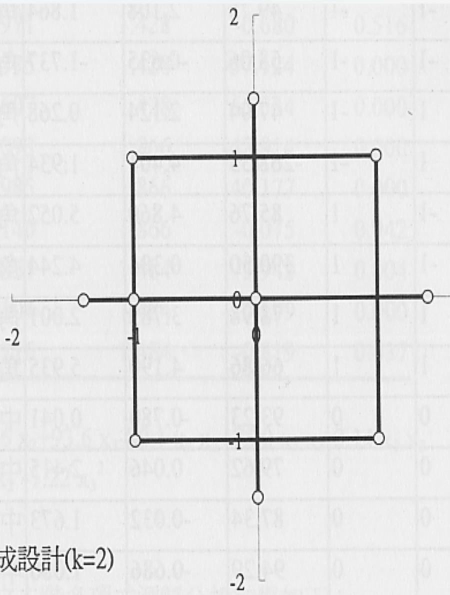

圖6-1 中央合成設計(k=2)

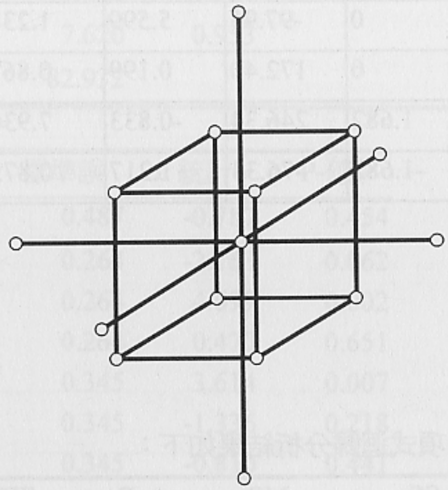

圖6-2 中央合成設計(k=3)

- 例題6.1 二階模型實驗設計1：中央合成設計

  延續例題5.4半導體晶圓問題，假設經過一階反應曲面法之參數優化過程後，得到一個最佳設計點，該點曲率效果顯著，故須改採二階反應曲面法之參數優化策略。此外為了滿足其它次要的品質特性需求，實驗時的反應變數多出二個。試以該點為中心點，以中央合成設計法作

  1. 實驗設計
  2. 模型建構

• （1）實驗設計

例題5.4之一階模式實驗設計為具中心點實驗（n_c=4）之因子實驗設計，故只要再增加軸點實驗，就可構成二階模式實驗設計之中央合成設計。軸點實驗的參數

$$\alpha = \sqrt[4]{F} = \sqrt[4]{8} = 1.682$$

實驗設計如下表第2-4行，實驗數據假設如下表第5-7行：

No.	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	說明
1	-1	-1	-1	49.75	2.108	1.864	角點實驗
2	1	-1	-1	58.06	-0.635	-1.737	角點實驗
3	-1	1	-1	47.04	2.124	0.268	角點實驗
4	1	1	-1	-268.53	4.401	1.934	角點實驗
5	-1	-1	1	85.76	4.860	5.052	角點實驗
6	1	-1	1	390.50	0.304	4.244	角點實驗
7	-1	1	1	78.98	3.789	2.001	角點實驗
8	1	1	1	66.86	4.190	5.935	角點實驗
9	0	0	0	93.23	-0.780	0.041	中心點實驗
10	0	0	0	79.62	0.046	2.415	中心點實驗
11	0	0	0	87.34	-0.032	1.673	中心點實驗
12	0	0	0	94.29	-0.686	1.080	中心點實驗
13	1.682	0	0	72.30	2.167	1.636	軸點實驗
14	-1.682	0	0	71.48	4.059	2.379	軸點實驗
15	0	1.682	0	-97.95	5.599	1.238	軸點實驗
16	0	-1.682	0	172.40	0.199	0.867	軸點實驗
17	0	0	1.682	246.34	-0.833	7.936	軸點實驗
18	0	0	-1.682	-76.33	1.217	0.875	軸點實驗

• （2）模型建構

反應變數 y_1 之二階多項式迴歸分析結果如下：

	自由度	SS	MS	F	顯著值
迴歸	9	311245.746	34582.861	1241.010	0.000
殘差	8	222.934	27.867		
總和	17	311468.680			

	係數	標準誤	t 統計	P-值
截距	88.606	2.636	33.619	0.000
x_1	-0.971	1.428	-0.680	0.516
x_2	-81.595	1.428	-57.124	0.000
x_3	93.607	1.428	65.534	0.000
x_1x_2	-80.093	1.866	-42.914	0.000
x_1x_3	74.985	1.866	40.177	0.000
x_2x_3	-0.140	1.866	-0.075	0.942
x_1^2	-5.851	1.484	-3.942	0.004
x_2^2	-18.104	1.484	-12.199	0.000
x_3^2	-1.215	1.484	-0.819	0.437

$$y_1=88.6-0.97x_1-81.6\,x_2+93.6\,x_3-80.1\,x_1\,x_2+75.0\,x_1\,x_3-0.14\,x_2\,x_3-5.85\,x_1^2-18.1\,x_2^2-1.22\,x_3^2$$

反應變數 y_2 之二階多項式迴歸分析結果如下：

	自由度	SS	MS	F	顯著值
迴歸	9	75.312	8.368	8.785	0.003
殘差	8	7.620	0.953		
總和	17	82.932			

	係數	標準誤	t 統計	P-值
截距	-0.384	0.487	-0.787	0.454
X_1	-0.571	0.264	-2.163	0.062
X_2	1.241	0.264	4.699	0.002
X_3	0.124	0.264	0.470	0.651
x_1x_2	1.247	0.345	3.614	0.007
x_1x_3	-0.461	0.345	-1.336	0.218
x_2x_3	-0.280	0.345	-0.810	0.441
x_1^2	1.321	0.274	4.816	0.001
x_2^2	1.246	0.274	4.540	0.002
x_3^2	0.289	0.274	1.053	0.323

$y_2 = -0.38 - 0.57 x_1 + 1.24 x_2 + 0.12 x_3 + 1.25 x_1 x_2 - 0.46 x_1 x_3 - 0.28 x_2 x_3 + 1.32 x_1^2 + 1.25 x_2^2 + 0.29 x_3^2$

反應變數 y_3 之二階多項式迴歸分析結果如下：

	自由度	SS	MS	F	顯著值
迴歸	9	85.945	9.549	20.467	0.000
殘差	8	3.733	0.467		
總和	17	89.678			

	係數	標準誤	t 統計	P-值
截距	1.308	0.341	3.835	0.005
x_1	-0.004	0.185	-0.023	0.982
x_2	0.098	0.185	0.530	0.610
x_3	1.961	0.185	10.609	0.000
x_1x_2	1.251	0.241	5.181	0.001
x_1x_3	0.633	0.241	2.620	0.031
x_2x_3	-0.430	0.241	-1.779	0.113
x_1^2	0.225	0.192	1.169	0.276
x_2^2	-0.113	0.192	-0.589	0.572
x_3^2	1.072	0.192	5.583	0.001

$y_3 = 1.31 + 0.10 x_2 + 1.96 x_3 + 1.25 x_1 x_2 + 0.63 x_1 x_3 - 0.43 x_2 x_3 + 0.255 x_1^2 - 0.113 x_2^2 + 1.072 x_3^2$

- **中央合成設計性質：預測變異之分佈與可旋性**

預測變異可用前章（5-6）式求得

$$Var\left[\hat{y}(x)\right] = x^{(m)'}\left(X'X\right)^{-1} x^{(m)} \bullet \sigma^2$$

可旋性是指預測變異Var$y(x)$ 在距中心點等距處等值，這樣的分佈十分合理，是實驗者樂於看到的性質。中央合成設計具有可旋性或近似可旋性的性質。

- **中央合成設計變形：面心式中央合成設計**

面心式中央合成設計是中央合成設計的變形，它將實驗分佈在立方體內，故軸點實驗是位在軸線上距中心點距離1處（二端）。當正規的中央合成設計之軸點實驗超過可行實驗範圍時，面心式中央合成設計是其替代方案。

• 中央合成設計區集：因子區集與軸區

二階實驗設計同樣也有區集設計問題，其設計要訣是將實驗分成因子區集與軸區集二部分。例如二因子二區集之設計如下：

因子區集		軸區集	
x_1	x_2	x_1	x_2
-1	-1	$-\sqrt{2}$	0
-1	1	$\sqrt{2}$	0
1	-1	0	$-\sqrt{2}$
1	1	0	$\sqrt{2}$
0	0	0	0
0	0	0	0
		0	0

三因子三區集之設計如下：

因子區集 1			因子區集 2			軸區集		
x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
-1	-1	-1	1	-1	-1	$-\alpha$	0	0
1	1	-1	-1	1	-1	α	0	0
1	-1	1	-1	-1	1	0	$-\alpha$	0
-1	1	1	1	1	1	0	α	0
0	0	0	0	0	0	0	0	$-\alpha$
0	0	0	0	0	0	0	0	α
						0	0	0
						0	0	0
						0	0	0

• 其它更複雜的區集設計可查表，如下表

因子數目(k)	2	3	4	5	5 : $\frac{1}{2}$ 部份	6	6 : $\frac{1}{2}$ 部份	7	7 : $\frac{1}{2}$ 部份
因子區集									
因子部份點數	4	8	16	32	16	64	32	128	64
因子部份區集數	1	2	2	4	1	8	2	16	8
每部份點數	4	4	8	8	16	8	16	8	8
每部份加入之中心點數	3	2	2	2	6	1	4	1	1
每部份總點數	7	6	10	10	22	9	20	9	9
軸區集									
軸部份點數	4	6	8	10	10	12	12	14	14
加入之中心點數	3	2	2	4	1	6	2	11	4
軸部份總點數	7	8	10	14	11	18	14	25	18
正交區集 α 值	1.414	1.633	2.000	2.366	2.000	2.828	2.366	3.364	2.828
可旋性區集 α 值	1.414	1.682	2.000	2.378	2.000	2.828	2.378	3.333	2.828
總點數	14	20	30	54	33	90	54	169	90

Source：G.E..P.Box and J.S.Hunter(1957)

3. Box-Behnken設計

- Box-Behnken設計是除了中央合成設計外，另一種重要的二階反應曲面實驗設計，當因子數k為3至7時其設計如下：

k=3 (參考圖 6-3)

$$
\mathbf{D}=\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}\\
\begin{bmatrix}
-1 & -1 & 0\\
-1 & 1 & 0\\
1 & -1 & 0\\
1 & 1 & 0\\
-1 & 0 & -1\\
-1 & 0 & 1\\
1 & 0 & -1\\
1 & 0 & 1\\
0 & -1 & -1\\
0 & -1 & 1\\
0 & 1 & -1\\
0 & 1 & 1\\
0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
\quad (6\text{-}5)
$$

k=4

$$
\mathbf{D}=\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}\\
\begin{bmatrix}
-1 & -1 & 0 & 0\\
-1 & 1 & 0 & 0\\
1 & -1 & 0 & 0\\
1 & 1 & 0 & 0\\
-1 & 0 & -1 & 0\\
-1 & 0 & 1 & 0\\
1 & 0 & -1 & 0\\
1 & 0 & 1 & 0\\
-1 & 0 & 0 & -1\\
-1 & 0 & 0 & 1\\
1 & 0 & 0 & -1\\
1 & 0 & 0 & 1\\
0 & -1 & -1 & 0\\
0 & -1 & 1 & 0\\
0 & 1 & -1 & 0\\
0 & 1 & 1 & 0\\
0 & -1 & 0 & -1\\
0 & -1 & 0 & 1\\
0 & 1 & 0 & -1\\
0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 0 & -1 & -1\\
0 & 0 & -1 & 1\\
0 & 0 & 1 & -1\\
0 & 0 & 1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

k=5

$$
\mathbf{D}=\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array}\\
\begin{bmatrix}
\pm1 & \pm1 & 0 & 0 & 0\\
\pm1 & 0 & \pm1 & 0 & 0\\
\pm1 & 0 & 0 & \pm1 & 0\\
\pm1 & 0 & 0 & 0 & \pm1\\
0 & \pm1 & \pm1 & 0 & 0\\
0 & \pm1 & 0 & \pm1 & 0\\
0 & \pm1 & 0 & 0 & \pm1\\
0 & 0 & \pm1 & \pm1 & 0\\
0 & 0 & \pm1 & 0 & \pm1\\
0 & 0 & 0 & \pm1 & \pm1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
\quad (6\text{-}7)
$$

(除中心點實驗外，其餘 10 列每列均有二個二水準因子，故共有 $2^2\times10=40$ 個實驗)

k=6

$$
\mathbf{D}=\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array}\\
\begin{bmatrix}
\pm1 & \pm1 & 0 & \pm1 & 0 & 0\\
0 & \pm1 & \pm1 & 0 & \pm1 & 0\\
0 & 0 & \pm1 & \pm1 & 0 & \pm1\\
\pm1 & 0 & 0 & \pm1 & \pm1 & 0\\
0 & \pm1 & 0 & 0 & \pm1 & \pm1\\
\pm1 & 0 & \pm1 & 0 & 0 & \pm1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
\quad (6\text{-}8)
$$

(除中心點實驗外，其餘 6 列均有三個二水準因子，故共有 $2^3\times6=48$ 個實驗)

k=7

$$
\mathbf{D}=\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array}\\
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & \pm1 & \pm1 & \pm1 & 0\\
\pm1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pm1 & \pm1\\
0 & \pm1 & 0 & 0 & \pm1 & 0 & \pm1\\
\pm1 & \pm1 & 0 & \pm1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \pm1 & \pm1 & 0 & 0 & \pm1\\
\pm1 & 0 & \pm1 & 0 & \pm1 & 0 & 0\\
0 & \pm1 & \pm1 & 0 & 0 & \pm1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
\quad (6\text{-}9)
$$

(除中心點實驗外，其餘 7 列均有三個二水準因子，故共有 $2^3\times7=56$ 個實驗)

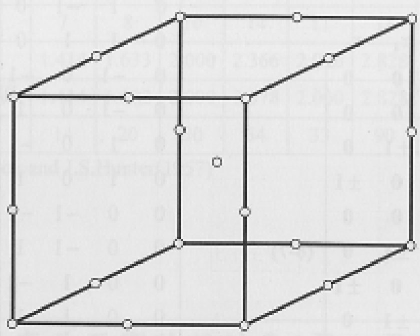

圖6-3 Box-Behnken設計(k=3)

- 中央合成設計與Box-Behnken設計之比較如下表所示，可以看出二者的實驗次數大致接近。

因子數	實驗次數(不含中心點實驗)	
	中央合成設計	Box-Behnken 設計
2	8 $(=2^2+2\times2)$	無此設計
3	14 $(=2^3+2\times3)$	12
4	24 $(=2^4+2\times4)$	24
5	26 $(=2^{5-1}+2\times5)$	40
6	44 $(=2^{6-1}+2\times6)$	48
7	78 $(=2^{7-1}+2\times7)$	56

- 例題6.2 二階模型實驗設計2：Box-Behnken設計

延續例題6.1半導體晶圓問題，但改採Box-Behnken設計。試作

1. 實驗設計
2. 模型建構

• （1）實驗設計

n_c = 4，實驗設計如下表第2-4行，實驗數據假設如下表第五行（只以y_1為例）

No.	x_1	x_2	x_3	y_1
1	-1	-1	0	62.6
2	-1	1	0	175.2
3	1	-1	0	84.1
4	1	1	0	72.7
5	-1	0	-1	75.5
6	-1	0	1	-81.6
7	1	0	-1	-14.7
8	1	0	1	53.3
9	0	-1	-1	391.5
10	0	-1	1	89.5
11	0	1	-1	230.9
12	0	1	1	62.6
13	0	0	0	1.2
14	0	0	0	-269.5
15	0	0	0	97.3
16	0	0	0	79.9

• （2）模型建構

反應變數y_1之二階多項式迴歸分析結果如下：

	自由度	SS	MS	F	顯著值
迴歸	9	168652.1	18739.13	482.726	7.01E-08
殘差	6	232.9163	38.81938		
總和	15	168885			

	係數	標準誤	t 統計	P-值
截距	86.906	3.115	27.896	1.4E-07
x_1	-2.638	2.202	-1.197	0.276154
x_2	-80.505	2.202	-36.546	2.8E-08
x_3	91.222	2.202	41.411	1.33E-08
x_1x_2	-79.758	3.115	-25.602	2.34E-07
x_1x_3	76.312	3.115	24.496	3.04E-07
x_2x_3	-4.717	3.115	-1.514	0.180727
x_1^2	-6.494	3.115	-2.084	0.082195
x_2^2	-17.051	3.115	-5.473	0.001553
x_3^2	-1.784	3.115	-0.572	0.587658

$$y_1=88.9-2.6x_1-80.5x_2+91.2x_3-79.8x_1x_2+76.3x_1x_3-4.7x_2x_3-6.5x_1^2-17.1x_2^2-1.8x_3^2$$

4. 最佳化準則設計

- 當實驗預算十分有限的情況下，前二節所提的方法可能都無法實施。例如五因子之二階實驗設計，假設中心點實驗重複次數5次，由表6-2知，至少要進行26＋5＝31次實驗。如果實驗預算只允許作25次實驗，這時需仰賴電腦依一定的準則來設計實驗。

- 本章前面曾提到二階函數有$1+2k+k(k-1)/2$ 個參數，因此至少需 $1+2k+k(k-1)/2$ 個設計點，故k=5則至少需21個設計點。因此以25次實驗來建構二階反應曲面是可行的，它尚保存自由度25－21＝4之誤差方差估計能力。

- 反應曲面實驗設計的目的在於以最少的實驗次數，獲致最精確的模型。最精確模型的定義很多，但一個比較簡單實用的定義為「估計係數變異Var b最小的模型」：

  Min var b

  由迴歸分析一章可知估計係數協方差的公式如下：

  $\text{Cov } b = \sigma^2 (X'X)^{-1}$

  其中 σ^2＝殘差之變異數

  X ＝實驗數據所構成的矩陣（實驗矩陣）

例如假設模型爲

$$y=\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_{11}x_1^2+\beta_{22}x_2^2+\beta_{12}x_1x_2+\varepsilon$$

則

$$\mathbf{b}=\begin{Bmatrix} b_0\\ b_1\\ b_2\\ b_{12}\\ b_{11}\\ b_{22}\end{Bmatrix} \qquad \mathbf{X}=\begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & x_{11}x_{12} & x_{11}^2 & x_{12}^2\\ 1 & x_{21} & x_{22} & x_{21}x_{22} & x_{21}^2 & x_{22}^2\\ : & : & : & & : & \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & x_{n1}x_{n2} & x_{n1}^2 & x_{n2}^2\end{bmatrix} \qquad (6\text{-}13)$$

其中 x_{ij} =爲第 i 筆數據之第 j 個自變數之值。一個具有 p 個項(不含常數項)的多項式函數模型之實驗矩陣 **X** 具有 p+1 個 n 維向量，n 爲實驗回合。其中第一個向量爲 1 構成之常數向量，其餘 p 個向量爲各個因子構成之變數向量。

估計係數變異 Var **b** 即 Cov **b** 的對角元素，故由(6-12)式可知模型變異 Var **b** 要越小，則 $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ 對角元素要越小；$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ 對角元素要越小，則 **X'X** 的行列值要越大。所謂 D-最佳化準則(D-Optimality)實驗設計即行列值最大化實驗設計：

$$\boxed{Max\left|\mathbf{X}'\mathbf{X}\right|} \qquad (6\text{-}14)$$

•除了D-最佳化準則外，也有學者提出A-最佳化準則，G-最佳化準則，Q-最佳化準則，簡述如下：

➢A-最佳化準則：以最小化最大Var b為目標，以最小化矩陣之反矩陣的跡（trace）為方法。

➢G-最佳化準則，以最小化實驗範圍內最大預測變異 $\left(Var\left[\hat{y}(x)\right]\right)$ 為目標

➢Q-最佳化準則，以最小化實驗範圍內平均預測變異 $\left(Var\left[\hat{y}(x)\right]\right)$ 為目標

一般而言，仍以D-最佳化準則最簡潔易懂。

• 例題6.3 二階模型實驗設計3：最佳化準則設計

延續例題6.1半導體晶圓問題，但因經費限制，只能作14次實驗，試以D最佳化準則作

1. 實驗設計
2. 模型建構

• (1) 實驗設計

電腦產生實驗設計之輸入參數包括：

模型：二階模型

實驗數：14

候選實驗設計點：27（每個實驗因子均有-1,0,1等三個值，採三水準全因子實驗，共有3^3=27）

實驗範圍：範圍為±1之矩形

設計準則：D最佳化準則

•實驗設計如表第2-4行，實驗數據假設如表第5行（只以y_1為例）

No.	x_1	x_2	x_3	y_1
1	1	1	1	67.9
2	0	0	1	65.8
3	-1	0	0	220.5
4	-1	-1	0	-100.7
5	-1	-1	1	63.7
6	1	0	-1	97.2
7	0	1	0	-92.5
8	-1	1	-1	246.2
9	1	-1	1	54.1
10	-1	1	1	242.4
11	1	-1	0	-96.8
12	0	-1	-1	72.6
13	0	0	-1	89.4
14	1	1	-1	81.0

• （2）模型建構

反應變數y_1之二階多項式迴歸分析結果如下：

反應變數 y_1 之二階多項式迴歸分析結果如下：

	自由度	SS	MS	F	顯著值
迴歸	9	291238.2	32359.79	1925.894	6.58E-07
殘差	4	67.20993	16.80248		
總和	13	291305.4			

	係數	標準誤	t 統計	P-值
截距	86.85796	3.243702	26.77742	1.16E-05
x_1	-2.68785	1.348095	-1.99381	0.11694
x_2	-82.6136	1.3499	-61.1998	4.27E-07
x_3	88.49723	1.395183	63.43055	3.7E-07
x_1x_2	-84.2708	1.509888	-55.8126	6.17E-07
x_1x_3	74.80769	1.694476	44.14798	1.57E-06
x_2x_3	3.215601	1.692306	1.90013	0.130219
x_1^2	-1.79685	2.751056	-0.65315	0.5493
x_2^2	-18.1257	2.611336	-6.94116	0.002263
x_3^2	-0.5624	2.558826	-0.21979	0.836798

- 採用D-最佳化準則的電腦產生之實驗設計有下列缺點：
  1. 模型錯估時，所產生的模型會有較大的誤差，故較不強健。
  2. 未考慮預測變異分佈之性質（例如可旋性），因此預測變異分佈情形可能不是很理想。
  3. 常未選用中心點實驗，因此在中心點處可能有大的預測變異。

5. 隨機產生設計

- 二階反應曲面實驗設計也可用隨機產生的方式得到，但這種設計效率甚低，因為在相同的實驗次數下，所獲致的模型最不精確。

- 例題6.4 二階模型實驗設計4：隨機產生之實驗設計

  延續例題6.3半導體晶圓問題，但改採隨機產生之實驗設計。

• （1）實驗設計

實驗設計如表第2-4行，實驗數據假設如表第5行（只以y_1為例）

No.	x_1	x_2	x_3	y_1
1	1	-1	0	218.9
2	0	1	-1	-111.7
3	0	0	-1	2.5
4	-1	-1	-1	47.2
5	0	0	0	82.9
6	-1	1	1	74.1
7	0	1	0	-5.7
8	1	0	0	73.5
9	0	0	1	179.8
10	1	-1	1	398.6
11	-1	-1	0	75.6
12	1	0	1	251.4
13	0	-1	-1	48.1
14	0	-1	1	238.2

• （2）模型建構

反應變數y_1之二階多項式迴歸分析結果如下：

	自由度	SS	MS	F	顯著值
迴歸	9	222442.9	24715.88	304.73	2.62E-05
殘差	4	324.43	81.1075		
總和	13	222767.4			

	係數	標準誤	t 統計	P-值
截距	91.10518	7.328426	12.43175	0.000241
X_1	-8.71472	7.894329	-1.10392	0.331568
x_2	-80.7986	3.825583	-21.1206	2.97E-05
x_3	93.33818	3.983833	23.42924	1.97E-05
x_1x_2	-83.6732	8.511478	-9.83063	0.0006
x_1x_3	84.78301	8.543919	9.923198	0.000579
x_2x_3	-3.55892	5.128757	-0.69391	0.525927
x_1^2	-5.39143	6.525584	-0.8262	0.455123
x_2^2	-22.0773	7.229045	-3.05397	0.037881
x_3^2	-5.10002	6.504004	-0.78414	0.476793

$$y_1=91.1-8.7x_1-80.8x_2+93.3x_3-83.7x_1x_2+84.8x_1x_3-3.6x_2x_3-5.4x_1^2-22.1x_2^2-5.1x_3^2$$

6. 二階反應曲面實驗設計之比較

- 本章以半導體晶圓問題為例，以四種方法作二階實驗設計，包括：
  - 例題6.1 中央合成設計
  - 例題6.2 Box-Behnken設計
  - 例題6.3 最佳化準則設計
  - 例題6.4 隨機產生設計

  比較例題6.1~6.4如下

- 1.迴歸係數之比較

  由下表得知，隨機產生設計所得之迴歸係數與其它三種方法有明顯差距，可能較不準確。表 迴歸係數之比較

	中央合成設計	Box-Behnken設計	D-最佳化準則設計	隨機產生設計
截距	88.6	86.9	86.9	91.1
x_1	-1.0	-2.6	-2.7	-8.7
x_2	-81.6	-80.5	-82.6	-80.8
x_3	93.6	91.2	88.5	93.3
x_1x_2	-80.1	-79.8	-84.3	-83.7
x_1x_3	75.0	76.3	74.8	84.8
x_2x_3	-0.1	-4.7	3.2	-3.6
x_1^2	-5.9	-6.5	-1.8	-5.4
x_2^2	-18.1	-17.1	-18.1	-22.1
x_3^2	-1.2	-1.8	-0.6	-5.1

• 2.迴歸係數顯著性（t統計量）之比較

由下表得知，隨機產生設計所得之迴歸係數t統計量遠低於其它三種方法，較不顯著。

表 迴歸係數t統計量之比較

	中央合成設計	Box-Behnken設計	D-最佳化準則設計	隨機產生設計
截距	33.6	27.9	26.8	12.4
x_1	-0.7	-1.2	-2.0	-1.1
x_2	-57.1	-36.5	-61.2	-21.1
x_3	65.5	41.4	63.4	23.4
x_1x_2	-42.9	-25.6	-55.8	-9.8
x_1x_3	40.2	24.5	44.1	9.9
x_2x_3	-0.1	-1.5	1.9	-0.7
x_1^2	-3.9	-2.1	-0.7	-0.8
x_2^2	-12.2	-5.5	-6.9	-3.1
x_3^2	-0.8	-0.6	-0.2	-0.8

• 3.迴歸模型顯著性（F統計量）之比較

由下表得知，隨機產生設計所得之迴歸模型顯著性明顯低於實驗數目同為14之D-最佳化準則設計。至於中央合成設計、 Box-Behnken設計、D-最佳化準則設計三者實驗數目不同，由於實驗數目大者，迴歸模型的F統計量愈高，故不能直接比較F統計量。但從顯著值P來看，中央合成設計最顯著，其次依序為Box-Behnken設計、D-最佳化準則設計、隨機產生設計。

表 迴歸模型顯著性（F統計量）之比較

	中央合成設計	Box-Behnken設計	D-最佳化準則設計	隨機產生設計
實驗數	18	16	14	14
F統計量	1241	483	1926	305
顯著值P	1.32E-11	7.01E-08	6.58E-07	2.62E-05

THE END