



Economic-statistical Design of 2-of-2 and 2-of-3 Runs Rule Scheme.



報 告 人：張志偉

指 導 老 師：童超塵 博士

作 者：Young-Bok Kim, Jung-Sik Hong and
Chang-Hoon Lie (Korea)

出 處：Qual. Reliab. Engin. Int.2009; 25:215-228

Abstract

- 這篇文章主要在研究2-of-2和2-of-3連串規則的經濟統計性設計，使用的方法是馬可夫鏈，利用馬可夫鏈方法去找出平均連串長度和製程的生產週期時間。
- 另外，利用簡易的演算法去尋找最佳的設計參數之建立，再提供數值例子以及敏感度分析去比較連串規則間的績效。
- 結果發現當維持良好的統計性成效時，連串規則的使用在減少作業成本方面是比修華特管制圖較好的。



Keywords

- Economic-statistical design
- Average run length (ARL)
- Average time to signal (ATS)
- Runs rule
- Markov chain approach



Content

- Introduction
- Development of Markov Chain Approach
- Cost Model
- Economic-statistical Design
- Numerical illustrations
- Conclusions

Introduction (1/5)

- 修華特管制圖的優點在於它的簡明便利性以及可以很快地偵測對於製程平均的大偏移，但相對小偏移的偵測就比較不敏感。
- 後來的研究開始加入連串規則來增加修華特管制圖對於偵測小偏移的敏感度，下頁是一些相關的文獻探討：

Introduction (2/5)

- Duncan(1956)首次提出經濟性最佳化的管制圖設計。
- Lorenzen & Vance(1986)提出一般型的管制圖經濟性模型。
- Champ & Woodall(1987)使用加入連串規則的修華特管制圖來探討他的績效。
- Saniga(1989)首次提出在經濟性模型下加入統計限制去降低製程變異及維持高的產品品質。
- Hurwitz & Mathur(1992)提出管制界限為 1.5σ 的簡單2-of-2連串規則。

Introduction (3/5)

- Prabhu、Montgomery & Runger(1997)提出適應性 $\bar{X}$ 管制圖的經濟統計性設計。
- Klein(2000)提出可供選擇的2-of-2與2-of-3規則，藉以調整管制界限來導出製程管制下的平均連串長度。
- Khoo & Ariffin(2006)利用Klein提出的連串規則加以改進並比較之間的績效。
- Acosta-Mejia(2007)分析 3.3σ 修華特管制圖的k-of-k和k-of-(k+1)連串規則的統計特性。

Introduction (4/5)

- 雖然有很多研究在討論連串規則的統計性觀點，但很少有研究注意到經濟性的問題，先前的研究貢獻大多在統計上的實效。
- 連串規則在經濟性上的考量指的是諸多的成本：如抽樣檢驗成本、調查發生管制外信號連帶的成本、消除可歸屬原因及不合格品到顧客手中的成本。
- 統計性的考量就是增加檢定力及減少誤警率，經濟性考量僅在於成本上的問題。

Introduction (5/5)

- 經濟統計性的設計原則跟SPC一樣，想同時減少成本並維持高的品質。
- 這篇文章所考慮的是2-of-2和2-of-3連串規則的經濟統計性設計，是修改Klein所提出的馬可夫鏈方法並參考Lorenzen & Vance(1986)推導出統計性的成本函數。
- 並利用Prabhu & Montgomery & Runger(1997)比較修華特管制圖與兩個連串規則的成本與統計性績效。

Notations(1/3)

■ Models

- ① Model 1：傳統修華特管制圖
- ② Model 2：2-of-2連串規則
- ③ Model 3：2-of-3連串規則

■ Design parameters

- ① k_i ：Model i 的管制界限係數
- ② n ：固定樣本數
- ③ h ：固定抽樣間隔

Notations(2/3)

■ Cost and time parameters

- ① C_0 : 製程在管制狀態下每小時不合格品的成本
- ② C_1 : 製程失控時每小時不合格品的成本
- ③ Y : 每次假警報的成本
- ④ W : 找出確定的和消除可歸屬原因的成本
- ⑤ a : 每個樣本的固定成本
- ⑥ b : 每單位抽樣的成本
- ⑦ E : 抽樣及標記一個點的期望時間
- ⑧ T_0 : 當假警報已發生時搜尋的期望時間
- ⑨ T_1 : 找到可歸屬原因的期望時間
- ⑩ T_2 : 恢復製程的期望時間

Notations(3/3)

■ Process parameters

- ① λ : 可歸屬原因發生的比率
- ② δ : 製程的標準差
- ③ γ_1 / γ_2 : 表示變數，當0時表示在搜尋及恢復期間生產停止；當1時表示在搜尋及恢復期間生產繼續

■ Statistics

- ① ARL : 平均連串長度
- ② ATS_0 : 當製程在管制狀態下的平均失控時間
- ③ ATS_1 : 當製程失控時的平均失控時間

Assumptions

■ 基本假設：

- ① 當製程在管制狀態的期間是服從平均數為 $1/\lambda$ 的指數隨機變數。
- ② 製程在每一次假警報後會重新開始。
- ③ 僅有一個可歸屬原因和在已知的數量下發生的製程平均偏移。

Markov chain approach(1/7)

- 依Lorenzen & Vance(1986)把週期時間劃分為下列五種：
 - ① 直到可歸屬原因發生的時間
 - ② 直到抽取下一個樣本的時間
 - ③ 抽樣、檢驗及標繪(plot)下一個觀測值的時間
 - ④ 直到圖產生一個製程失控訊號的時間
 - ⑤ 搜尋、找出及排除可歸屬原因和恢復製程的時間

Markov chain approach(2/7)

- ALRC (Average length of renewal cycle), which is defined as the average number of observations from the start of in-control process to the state when a true out-of-control signal is given.

➤ 包含上頁所提①②④的式子

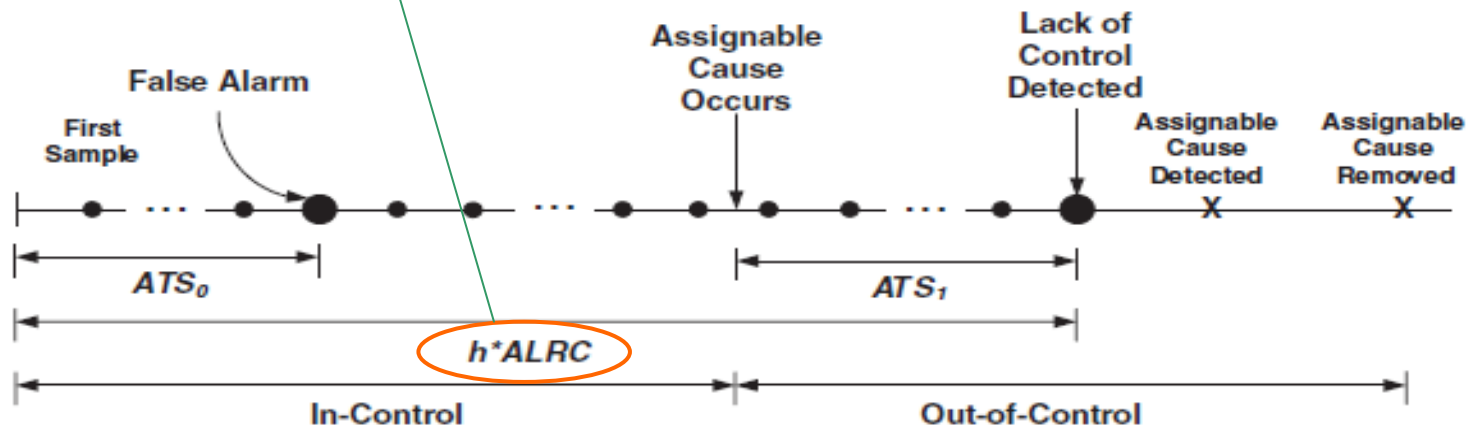


Figure 1. Diagram of in-control and out-of-control states of a process

Markov chain approach(3/7)

- Klein(2000)提出馬可夫鏈方法來計算2-of-2和2-of-3連串規則的ARL，但僅此並不能準確的導出ALRC，因為Klein的方法沒有考慮到生產製程是否在管制狀態下。
- 本文所考慮的馬可夫鏈方法有以下兩個方面：
 - ① 製程有沒有在管制狀態下？
 - ② 落點有沒有落在LCL和UCL之間？

Markov chain approach(4/7)

- 下表為2-of-2連串規則的馬可夫鏈狀態解釋：

State	Interpretation
$\{O, I\}$	A point is between LCL and UCL during in-control period
$\{U, I\}$	A point is above the UCL during in-control period
$\{L, I\}$	A point is below the LCL during in-control period
$\{S, I\}$	Two successive points are either above the UCL or below the LCL during in-control period
$\{O, N\}$	A point is between LCL and UCL during out-of-control period
$\{U, N\}$	A point is above the UCL during out-of-control period
$\{L, N\}$	A point is below the LCL during out-of-control period
$\{S, N\}$	Two successive points are either above the UCL or below the LCL during out-of-control period, the absorbing state

Markov chain approach(5/7)

- 下表為2-of-2連串規則的狀態轉移機率矩陣：

Table I. State transition matrix for 2-of-2 runs rule scheme

		States at (n+1)th sampling sequence							
		{O, I}	{U, I}	{L, I}	{S, I}	{O, N}	{U, N}	{L, N}	{S, N}
States at (n)th sampling sequence	{O, I}	$(1-r)p$	$(1-r)p_U$	$(1-r)p_L$	0	rq	rq_U	rq_L	0
	{U, I}	$(1-r)p$	0	0	$(1-r)(1-p)$	rq	0	0	$r(1-q)$
	{L, I}	$(1-r)p$	0	0	$(1-r)(1-p)$	rq	0	0	$r(1-q)$
	{S, I}	$(1-r)p$	$(1-r)p_U$	$(1-r)p_L$	0	rq	rq_U	rq_L	0
	{O, N}	0	0	0	0	q	q_U	q_L	0
	{U, N}	0	0	0	0	q	0	0	$1-q$
	{L, N}	0	0	0	0	q	0	0	$1-q$
	{S, N}	0	0	0	0	0	0	0	1

- 其中 $r = 1 - e^{-\lambda h}$ $p_L = \Phi(-k_2)$ $p_U = 1 - \Phi(k_2)$
 $q_L = \Phi(-k_2 - \delta\sqrt{n})$, $q_U = 1 - \Phi(k_2 - \delta\sqrt{n})$
 $p + p_U + p_L = 1$, $q + q_U + q_L = 1$



Markov chain approach(6/7)

- 下表為2-of-3連串規則的狀態轉移機率矩陣：

Table A1. State transition matrix for 2-of-3 runs rule scheme

		States at $(n+1)$ th sampling sequence							
		$\{OO, I\}$	$\{OU, I\}$	$\{OL, I\}$	$\{UL, I\}$	$\{UO, I\}$	$\{LO, I\}$	$\{LU, I\}$	$\{S, I\}$
States at (n) th sampling sequence	$\{OO, I\}$	$(1-r)p$	$(1-r)p_U$	$(1-r)p_L$	0	0	0	0	0
	$\{OU, I\}$	0	0	0	$(1-r)p_L$	$(1-r)p$	0	0	$(1-r)p_U$
	$\{OL, I\}$	0	0	0	0	0	$(1-r)p$	$(1-r)p_U$	$(1-r)p_L$
	$\{UL, I\}$	0	0	0	0	0	$(1-r)p$	0	$(1-r)(p_U+p_L)$
	$\{UO, I\}$	$(1-r)p$	0	$(1-r)p_L$	0	0	0	0	$(1-r)p_U$
	$\{LO, I\}$	$(1-r)p$	$(1-r)p_U$	0	0	0	0	0	$(1-r)p_L$
	$\{LU, I\}$	0	0	0	0	$(1-r)p$	0	0	$(1-r)(p_U+p_L)$
	$\{S, I\}$	$(1-r)p$	$(1-r)p_U$	$(1-r)p_L$	0	0	0	0	0
	$\{OO, N\}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\{OU, N\}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\{OL, N\}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\{UL, N\}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\{UO, N\}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\{LO, N\}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\{LU, N\}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\{S, N\}$	0	0	0	0	0	0	0	0
		$\{OO, N\}$	$\{OU, N\}$	$\{OL, N\}$	$\{UL, N\}$	$\{UO, N\}$	$\{LO, N\}$	$\{LU, N\}$	$\{S, N\}$
	$\{OO, I\}$	rq	rq_U	rq_L	0	0	0	0	0
	$\{OU, I\}$	0	0	0	rq_L	rq	0	0	rq_U
	$\{OL, I\}$	0	0	0	0	0	rq	rq_U	rq_L
	$\{UL, I\}$	0	0	0	0	0	rq	0	$r(q_U+q_L)$
	$\{UO, I\}$	rq	0	rq_L	0	0	0	0	rq_U
	$\{LO, I\}$	rq	rq_U	0	0	0	0	0	rq_L
	$\{LU, I\}$	0	0	0	0	rq	0	0	$r(q_U+q_L)$
	$\{S, I\}$	rq	rq_U	rq_L	0	0	0	0	0
	$\{OO, N\}$	q	q_U	q_L	0	0	0	0	0
	$\{OU, N\}$	0	0	0	q_L	q	0	0	q_U
	$\{OL, N\}$	0	0	0	0	0	q	q_U	q_L
	$\{UL, N\}$	0	0	0	0	0	q	0	q_U+q_L
	$\{UO, I\}$	q	0	q_L	0	0	0	0	q_U
	$\{LO, N\}$	q	q_U	0	0	0	0	0	q_L
	$\{LU, N\}$	0	0	0	0	q	0	0	q_U+q_L
	$\{S, N\}$	0	0	0	0	0	0	0	1



Markov chain approach(7/7)

■ 透過轉移機率矩陣表可得下列各統計量：

$$\textcircled{1} \quad ALRC_{\text{Model 1}} = \frac{1}{r} + \frac{q}{1-q}$$

$$\textcircled{2} \quad ALRC_{\text{Model 2}} = \frac{1}{r} + \frac{1-q+2q_Uq_L+q(1+q_L)(1+q_U)(1+p_U-rp_U)}{(1-q_Uq_L-q(1+q_L)(1+q_U))(1+p_U-rp_U)}$$

$$\textcircled{3} \quad ARL_{\text{Model 1}} = \frac{1}{1-p}$$

$$\textcircled{4} \quad ARL_{\text{Model 2}} = \frac{1+p_U}{2p_U^2}$$

$$\textcircled{5} \quad ATS_0 = h \times ARL$$

$$\textcircled{6} \quad ATS_1 = h \times ALRC - \frac{1}{\lambda}$$

Cost model(1/2)

- 為了推導全週期時間函數，本文再把週期時間分成三部份：(1)直到圖發生真實的製程失控訊號的時間，以 A_1 表示；(2)發現可歸屬原因且修復製程的時間，以 A_2 表示；(3)分析並標記樣本點的時間，以 A_3 表示：

① $A_1 = h \times ALRC + \frac{(1-\gamma_1)s T_0}{ARL}$, where $s = e^{-\lambda h} / (1 - e^{-\lambda h})$

② $A_2 = T_1 + T_2$

③ $A_3 = nE$

- 得全週期時間函數 R 為：

$$R = h \times ALRC + \frac{(1-\gamma_1)s T_0}{ARL} + T_1 + T_2 + nE$$

Cost model(2/2)

- 成本函數包括四項：(1)每次生產週期中由不合格品帶來的成本，以 B_1 表示；(2)抽樣成本，以 B_2 表示；(3)確定可歸屬原因的點及修復製程的成本，以 B_3 表示；(4)假警報的成本，以 B_4 表示：

$$\textcircled{1} \quad B_1 = [C_0(1/\lambda)] + \{C_1[(R - 1/\lambda - (1 - \gamma_1)T_0s/ARL) - (1 - \gamma_1)T_1 - (1 - \gamma_2)T_2]\}$$

$$\textcircled{2} \quad B_2 = (a + bn)(R - (1 - \gamma_1)T_0s/ARL - (1 - \gamma_1)T_1 - (1 - \gamma_2)T_2)/h$$

$$\textcircled{3} \quad B_3 = W$$

$$\textcircled{4} \quad B_4 = Y \left(\frac{s}{ARL} \right)$$

- 得每生產週期期望總成本函數AC為：

$$AC = (B_1 + B_2 + B_3 + B_4)/R$$

Economic-statistical design(1)

- 經濟統計性設計的目標是製程在管制下的ARL大於一個最小值及製程失控時的ARL小於一個最大值的限制下求得成本最小化
- 在經濟性的目標下加入統計性的限制，跟只討論經濟性而言是會付出不利的代價且會有更高的成本發生，但是這些代價對於要減少誤警率及能更早偵測到可歸屬原因的發生的優勢只有微小的影響而已。

Economic-statistical design(2)

- 經濟統計性設計的模型如下：

$$\begin{array}{ll}\text{Minimize} & AC \\ \text{Subject to} & ATS_0 > l, \quad ATS_1 < u\end{array}$$

where l is the lower bound on the ATS_0 and u is the upper bound on the ATS_1

- 求解過程中我們限制管制界限係數從1到4，且每次增加0.01，以及限制樣本數在一個整數空間，但無法限制抽樣間隔在一個值或範圍，因此利用Mathematica 5.2裡的"NMinimize"找出樣本數及抽樣間隔。

Economic-statistical design(2)



經濟統計性設計求解過程

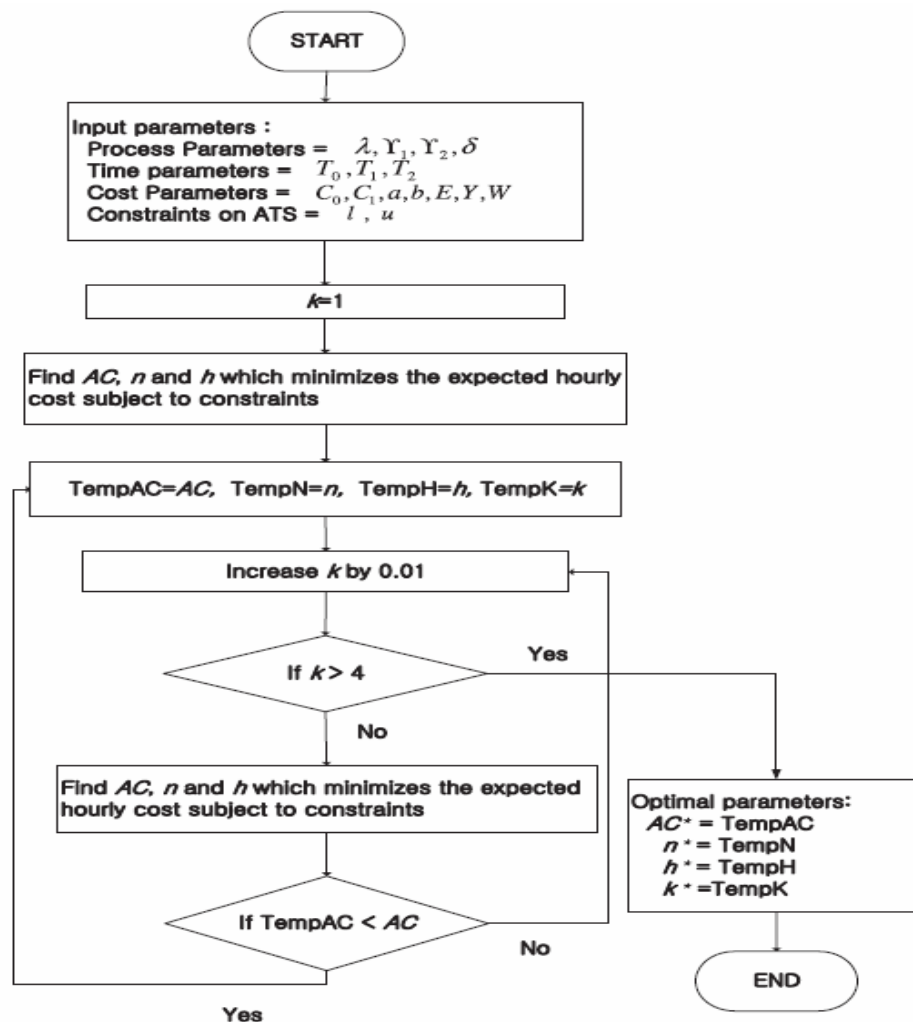


Figure 2. Constrained optimization search procedure for the economic-statistical design

Numerical example(1/2)

■ 引用 Lorenzen&Vance(1986)的鑄鐵廠作業的例子，成本及製程參數如下：

- | | |
|---------------------|----------------------------|
| 1) $\lambda = 1/50$ | 9) $\gamma_1 = 1$ |
| 2) $\delta = 0.86$ | 10) $\gamma_2 = 0$ |
| 3) $C_0 = \$114.24$ | 11) $T_0 = T_1 = E = 5/50$ |
| 4) $C_1 = \$949.20$ | 12) $T_2 = 45/60$ |
| 5) $W = \$1086$ | |
| 6) $Y = \$977.40$ | |
| 7) $a = 0$ | |
| 8) $b = \$4.22$ | |

Numerical example(2/2)

Table II. Statistical and economical results for the illustrative example

	n^*	h^*	k^*	ATS_0	ATS_1	AC^*	% Ratio
Model 1	16	2.64	2.79	500	2.24	225.16	
Model 2	8	0.92	1.88	526.81	2.64	222.20	1.31
Model 3	8	0.98	2.00	500	2.58	219.40	2.56

- 訂 ATS_0 的下限為500， ATS_1 的上限為8。
- 雖然2-of-2和2-of-3連串規則方案的 ATS_1 會些許的增加，但成本相對於傳統修華特管制圖減少比例分別為1.31%和2.56%。
- 如果鑄鐵廠能採用2-of-3連串規則方案的話，比傳統修華特管制圖的最佳策略每年可以節省近\$50,000。

Sensitivity analysis(1/5)

- 使用實驗設計中的部份因子設計對六個成本參數與兩個製程參數來進行敏感度分析。

Table III. Cost and process parameters

Parameters	Value	
	Low	High
a	1	2
b	0.2	0.6
W	150	300
Y	200	500
C_0	100	200
C_1	250	500
λ	0.01	0.05
δ	0.5	1.0

Table IV. Fixed parameters and bounds of constraints

Parameters	Value
T_0	5.5
T_1	3.5
T_2	8
E	0.275
γ_1	1
γ_2	0
l	500
u	8

Sensitivity analysis(2/5)

Table V. Design set for sensitivity analysis

Case	λ	C_0	C_1	W	a	b	Y	δ
1	0.01	100	250	150	1	0.2	200	0.5
2	0.05	100	250	150	1	0.6	500	1.0
3	0.01	200	250	150	2	0.2	500	1.0
4	0.05	200	250	150	2	0.6	200	0.5
5	0.01	100	500	150	2	0.6	500	0.5
6	0.05	100	500	150	2	0.2	200	1.0
7	0.01	200	500	150	1	0.6	200	1.0
8	0.05	200	500	150	1	0.2	500	0.5
9	0.01	100	250	300	2	0.6	200	1.0
10	0.05	100	250	300	2	0.2	500	0.5
11	0.01	200	250	300	1	0.6	500	0.5
12	0.05	200	250	300	1	0.2	200	1.0
13	0.01	100	500	300	1	0.2	500	1.0
14	0.05	100	500	300	1	0.6	200	0.5
15	0.01	200	500	300	2	0.2	200	0.5
16	0.05	200	500	300	2	0.6	500	1.0

Sensitivity analysis(3/5)

Table VI. Optimal design comparisons for the Shewhart chart and runs rules

Model 1							Model 2							Model 3						
n^*	h^*	k^*	ATS_0	ATS_1	AC^*		n^*	h^*	k^*	ATS_0	ATS_1	AC^*	% Ratio	n^*	h^*	k^*	ATS_0	ATS_1	AC^*	% Ratio
1	24	1.69	2.93	500	4.53	115.83	15	0.96	1.86	500	4.68	113.90	1.7	14	0.98	2.00	500	4.75	113.42	2.1
2	9	0.94	3.11	500	1.59	118.32	7	0.61	1.96	500	1.56	117.19	1.0	7	0.61	2.10	500	1.48	116.85	1.2
3	11	3.34	2.87	813.26	3.30	193.48	8	1.87	1.93	1332.87	4.10	193.87	-0.2	8	1.80	2.16	1971.48	4.01	193.09	0.2
4	24	1.99	2.88	500	4.99	188.81	15	0.96	1.86	500	4.68	186.52	1.2	14	0.98	2.00	500	4.76	185.70	1.6
5	24	1.75	2.92	500	4.61	151.46	15	0.96	1.86	500	4.68	146.32	3.4	14	0.93	2.01	500	4.60	144.97	4.3
6	10	0.45	3.32	500	0.80	167.46	8	0.33	2.09	500	0.81	163.46	2.4	8	0.32	2.23	500	0.75	163.03	2.6
7	10	1.69	2.93	500	2.02	212.83	6	0.84	1.89	500	2.38	212.21	0.3	6	0.85	2.03	500	2.27	211.84	0.5
8	24	0.67	3.21	500	2.64	263.56	19	0.51	2.00	500	2.17	252.64	4.1	19	0.37	2.20	500	1.58	250.62	4.9
9	10	2.80	2.77	500	2.90	111.30	7	1.54	1.75	500	3.38	110.92	0.3	7	1.61	1.89	500	3.36	110.75	0.5
10	23	0.76	3.17	500	3.09	140.48	18	0.64	1.95	500	2.76	135.72	3.4	17	0.67	2.08	500	2.83	134.71	4.1
11	28	6.00	2.52	511.15	7.94	200.57	20	3.07	1.59	518.61	8.00	200.82	-0.1	14	2.04	1.84	511.25	8.00	200.50	0.0
12	9	0.82	3.15	500	1.45	176.08	7	0.58	1.97	500	1.50	175.46	0.4	7	0.55	2.12	500	1.36	175.27	0.5
13	9	0.79	3.16	500	1.41	125.26	7	0.56	1.98	500	1.44	124.25	0.8	7	0.55	2.15	576.01	1.39	123.98	1.0
14	23	0.74	3.18	500	3.03	225.17	18	0.58	1.97	500	2.58	212.17	5.8	17	0.61	2.10	500	2.64	209.45	7.0
15	21	0.97	3.10	500	4.14	228.26	17	0.80	1.90	500	3.50	224.56	1.6	16	0.78	2.05	500	3.39	223.64	2.0
16	9	0.69	3.20	500	1.29	232.01	7	0.61	1.96	500	1.56	229.57	1.1	7	0.46	2.16	500	1.16	228.40	1.6

Sensitivity analysis(4/5)

Table VII. Sensitivity analysis results for 2-of-2 runs rules

	n^*	h^*	k^*	AC^*
a	+			
b	—		—	
W				
Y				
C_0				+
C_1		—	+	+
λ		—	+	
δ	—			

Sensitivity analysis(5/5)

Table VIII. Sensitivity analysis results for 2-of-3 runs rules

	n^*	h^*	k^*	AC^*
a	+			
b			—	
W				
Y				
C_0				+
C_1	—	—	+	+
λ	—	—	+	
δ	—		+	

Conclusions

- 研究顯示出，在大部份的案例下，相似的統計性限制下，連串規則是比修華特管制圖能節省每小時的期望成本。
- 2-of-3連串規則在經濟性觀點來看是比2-of-2連串規則更吸引人的，但2-of-2連串規則卻是比較容易設立使用的，因此品質工程師可以根據製程的情況選擇一個較好的連串規則作製程監控。