



Joint statistical design of double sampling $\bar{X}$ and s charts



出處：European Journal of operational research(2006)

作者：David He, Arsen Grigoryan

報告者：卓益如

指導老師：童超塵

- Abstract
- Introduction
- The joint DS $\bar{X}$ and s charts
- Formulation of joint statistical design of the DS $\bar{X}$ and s charts
- Solving the optimization problem using genetic algorithm
- Performance of the joint DS $\bar{X}$ and s charts
- conclusions

Abstract

- 過去學者皆使用結合 $\bar{X}$ chart 和 R chart 之管制圖來偵測製程平均數和變異數。但是本篇以結合 DS $\bar{X}$ chart 和 DS s chart 來進行製程品質控管。
- 以 ARL 作為判斷績效之指標。
- 在任何偏移值下，joint DS chart 比其他管制圖皆有較好的偵測能力。

Introduction(1)

- 過去探討同時監測平均數和變異數，大多是結合 $\bar{X}$ 和 R 管制圖 (Jones and Case, 1981; Rahim, 1989; Saniga, 1991; Costa, 1993, 1998; Costa and Rahim, 2000)。
- San(1991)提出 $\bar{X}$ and R chart 之統計管制圖，使用 FORTRAN 幫助使用者決定管制界限和樣本大小；且能根據 ARL，Type I、II error，ATS 作為判斷的標準。

Introduction(2)

- Gan(1995)發展EWMA管制圖同時監測製程平均數和變異數。
 - EE_u : two-sided EWMA mean chart 與 high-side EWMA variance chart 的合併
 - EE: two-sided EWMA mean chart 與 two-side EWMA variance chart 的合併
 - 與 combined two-sided CUSUM (CC) 和 omnibus EWMA chart 作比較：在 out-of-control 同時降低變異偵測製程平均數偏移的情況下，omnibus EWMA 和 EE_u scheme 是比較無效的。

Introduction(3)

- 建議將EE和CC做合併因為兩者績效都比 omnibus chart來得好；omnibus在樣本超出管制界線時無法得知是 μ 或 σ 偏移
- Chen(2001)提出newEWMA(MaxEWMA) ，結合兩個樣本統計量之管制圖。
 - 與standard $\bar{X}$ and R chart 比較，MaxEWMA偵測小偏移較好
 - MaxEWMA在變異增加時，且製程平均發生偏移的情況下會比EWMA mean chart和EWMA variable chart 之合併管制圖來得好

Introduction(4)

- Costa (1998,1999)提出適應性 $\bar{X}$ and R chart，後一個樣本大小和抽樣間隔取決於前一個樣本點落點位置。

Introduction(5)

- Daudin(1992)和He and Grigoryan(2002,2003)

提出結合DS $\bar{X}$ and s charts之動機

- Daudin提出DS $\bar{X}$ chart 使得在沒有增加抽樣大小情況下，能提高偵測績效(ARL)；或者是減少抽樣大小，但ARL沒有改變。

- ① 如果必須考慮時間但樣本大小可以忽略時，則DS $\bar{X}$ 比VSI好
- ② $r=0.75$ 時,DS chart會比 EWMA好； $r= .5$ $r=0.25$ 時EWMA能快速偵測小偏移，而DS適合偵測大偏移
- ③ 和two-sided combined Shewhart CUSUM相比，DS對大偏移有較好偵測能力。

Introduction(6)

- He and Grigoryan則是延伸Daudin的想法而發展DS s chart。文中以DS s 和傳統s chart做比較，在沒有改變 ARL_1 情況下，在任何偏移下($0.6 \leq \lambda \leq 5$) DS s chart 之平均樣本大小都有明顯下降。
- 因為 $DS \bar{X}$ 是用來偵測製程平均偏移而DS s chart 是用來偵測製程標準差偏移，因此將 $DS \bar{X}$ 和DS s chart結合同時偵測平均數和標準差是合理的。

The joint DS $\bar{X}$ and s charts

- 假設觀察值為獨立，且品質特性 $X \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$
若平均數有偏移則以 $\mu_1 = \mu_0 \pm \delta\sigma_0$ 表示，標準差有
偏移則以 $\sigma_1 = \lambda\sigma_0$ 表示。

- 定義：

$$c_{41} = \left(\sqrt{\frac{2}{n_1 - 1}} \right) \frac{\Gamma(n_1/2)}{\Gamma[(n_1 - 1)/2]}, \text{ coefficient for sample size of } n_1$$

$$c_4 = \left(\sqrt{\frac{2}{n_1 + n_2 - 2}} \right) \frac{\Gamma[(n_1 + n_2 - 1)/2]}{\Gamma[(n_1 + n_2 - 2)/2]}, \text{ coefficient for sample size of } n_1 + n_2$$

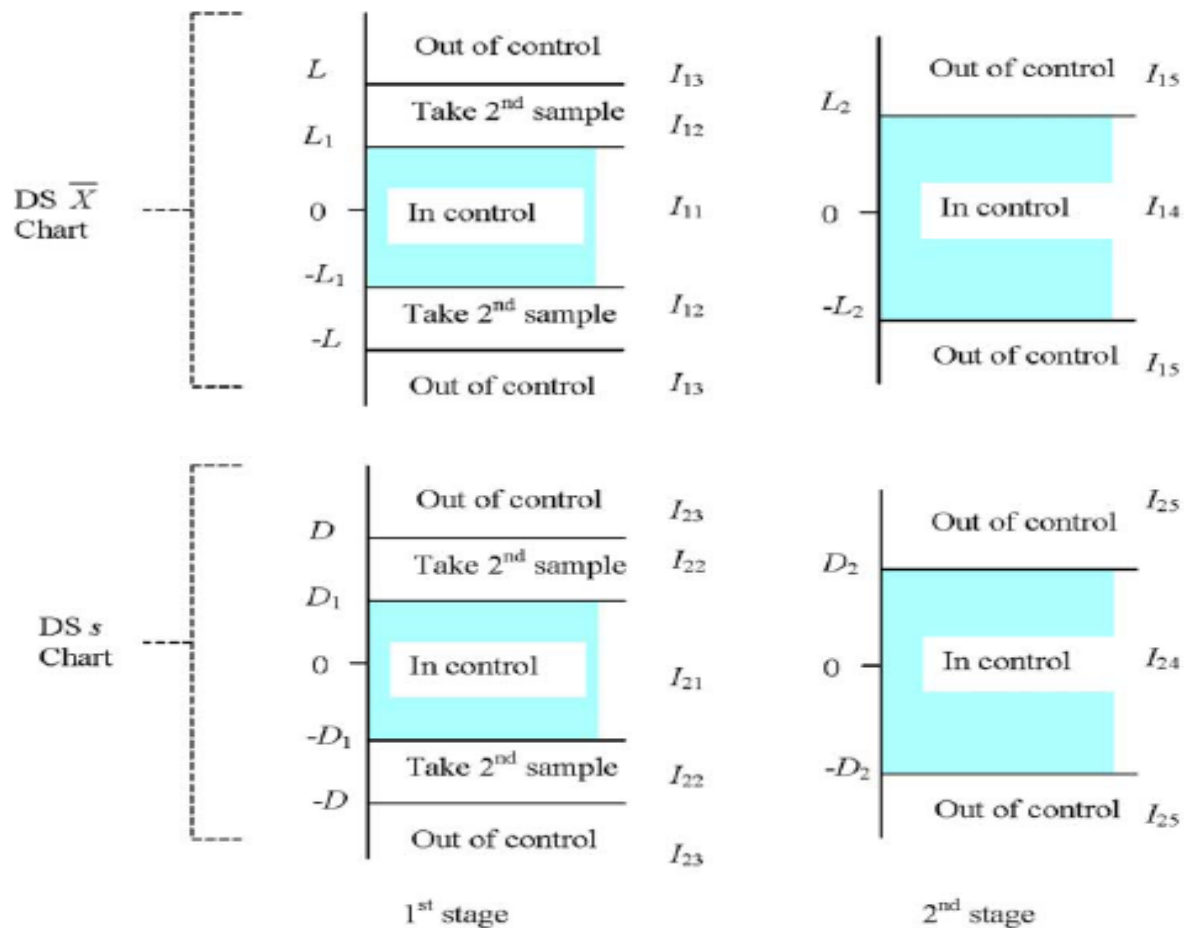


Fig. 1. Schematic representation of the joint DS $\bar{X}$ and DS s charts.

The joint DS $\bar{X}$ and s chart procedure:

- (1) Take an initial sample of size n_1 and calculate the sample mean $\bar{X}_1$ and sample standard deviation s_1 .
- (2) If $\frac{\bar{X}_1 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n_1}}$ lies in the range $[-L_1, L_1]$ and $\frac{s_1 - c_{41}\sigma}{\sigma\sqrt{1-c_{41}^2}}$ lies in the range $[-D_1, D_1]$, the joint scheme indicates that the process is in control.
- (3) If $\frac{\bar{X}_1 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n_1}}$ lies in the range $(-\infty, -L]$ and $[L, +\infty)$ or $\frac{s_1 - c_{41}\sigma}{\sigma\sqrt{1-c_{41}^2}}$ lies in the range $(-\infty, -D]$ and $[D, +\infty)$, then the joint scheme indicates that the process is out of control.
- (4) If $\frac{\bar{X}_1 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n_1}}$ lies in the intervals $[-L, -L_1]$ and $[L_1, L]$, and/or if $\frac{s_1 - c_{41}\sigma}{\sigma\sqrt{1-c_{41}^2}}$ lies in the intervals $[-D, -D_1]$ and $[D_1, D]$, take a second sample of size n_2 and calculate the sample mean $\bar{X}_2$ and the total sample mean $\bar{Y} = \frac{n_1\bar{X}_1 + n_2\bar{X}_2}{n_1 + n_2}$, and/or the total sample standard deviation $s_{12} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^2 (n_i - 1)s_i^2}{\sum_{i=1}^2 n_i - 2}} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$.
- (5) If $\frac{\bar{Y} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n_1 + n_2}}$ lies in the interval $[-L_2, L_2]$ and/or $\frac{s_{12} - c_{42}\sigma}{\sigma\sqrt{1-c_{42}^2}}$ lies in the interval $[-D_2, D_2]$, then the joint scheme indicates that the process is in control; else the process is out of control.

Formulation of joint statistical design of the DS and s chart

■ 定義區間和符號：

$$I_{11} = \left[\mu_0 - \frac{L_1 \sigma}{\sqrt{n_1}}, \mu_0 + \frac{L_1 \sigma}{\sqrt{n_1}} \right],$$

$$I_{12} = \left[\mu_0 - \frac{L \sigma}{\sqrt{n_1}}, \mu_0 - \frac{L_1 \sigma}{\sqrt{n_1}} \right] \cup \left[\mu_0 + \frac{L_1 \sigma}{\sqrt{n_1}}, \mu_0 + \frac{L \sigma}{\sqrt{n_1}} \right],$$

$$I_{13} = \left(-\infty, \mu_0 - \frac{L \sigma}{\sqrt{n_1}} \right] \cup \left[\mu_0 + \frac{L \sigma}{\sqrt{n_1}}, +\infty \right),$$

$$I_{14} = \left[\mu_0 - \frac{L_2 \sigma}{\sqrt{n_1 + n_2}}, \mu_0 + \frac{L_2 \sigma}{\sqrt{n_1 + n_2}} \right],$$

$$I_{15} = \left(-\infty, \mu_0 - \frac{L_2 \sigma}{\sqrt{n_1 + n_2}} \right] \cup \left[\mu_0 + \frac{L_2 \sigma}{\sqrt{n_1 + n_2}}, +\infty \right),$$

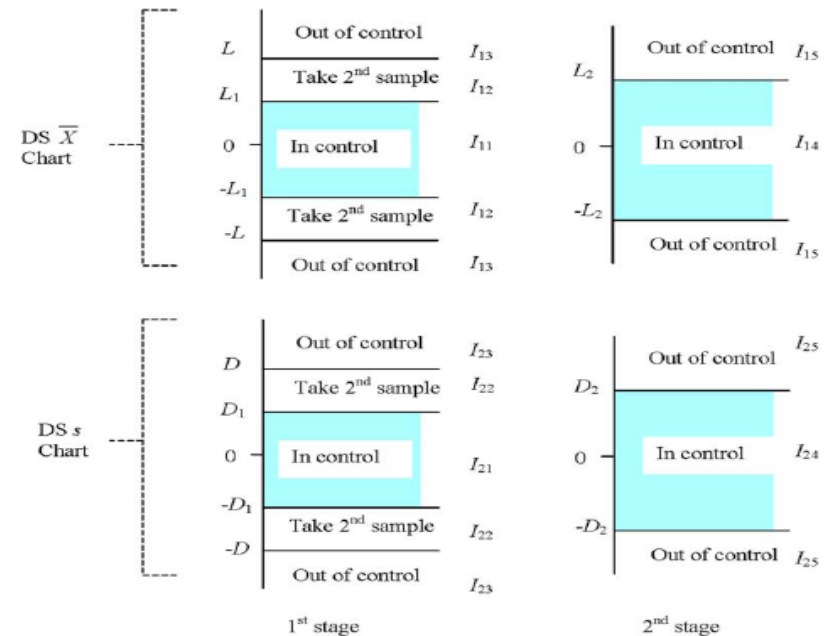


Fig. 1. Schematic representation of the joint DS $\bar{X}$ and DS s charts.

$$I_{21} = \left[c_{41}\sigma - D_1\sigma\sqrt{1 - c_{41}^2}, c_{41}\sigma + D_1\sigma\sqrt{1 - c_{41}^2} \right],$$

$$I_{22} = \left[c_{41}\sigma - D\sigma\sqrt{1 - c_{41}^2}, c_{41}\sigma - D_1\sigma\sqrt{1 - c_{41}^2} \right] \cup \left[c_{41}\sigma + D_1\sigma\sqrt{1 - c_{41}^2}, c_{41}\sigma + D\sigma\sqrt{1 - c_{41}^2} \right]$$

$$I_{23} = \left(-\infty, c_{41}\sigma - D\sigma\sqrt{1 - c_{41}^2} \right] \cup \left[c_{41}\sigma + D\sigma\sqrt{1 - c_{41}^2}, \infty \right),$$

$$I_{24} = \left[c_4\sigma - D_2\sigma\sqrt{1 - c_4^2}, c_4\sigma + D_2\sigma\sqrt{1 - c_4^2} \right],$$

$$I_{25} = \left(-\infty, c_4\sigma - D_2\sigma\sqrt{1 - c_4^2} \right] \cup \left[c_4\sigma + D_2\sigma\sqrt{1 - c_4^2}, +\infty \right).$$

- $\alpha_{\bar{X}}$ = probability of Type I error of $\bar{X}$ chart
- α_S = probability of Type I error of s chart
- $\beta_{\bar{X}}$ = probability of Type II error of $\bar{X}$ chart
- β_S = probability of Type II error of s chart

$$\text{Min}_{n_1, n_2, L, L_1, L_2, D, D_1, D_2} \text{ARL}_1 \quad (1)$$

$$\text{Subject to: } n_1 + n_2 \times \{\text{Probability of taking the second sample} | \mu = \mu_0; \sigma = \sigma_0\} \leq N_{\max} \quad (2)$$

$$P_r[DS \bar{X} \text{ chart signals} | \mu = \mu_0; \sigma = \sigma_0] \leq \alpha_{\bar{X}} \quad (3)$$

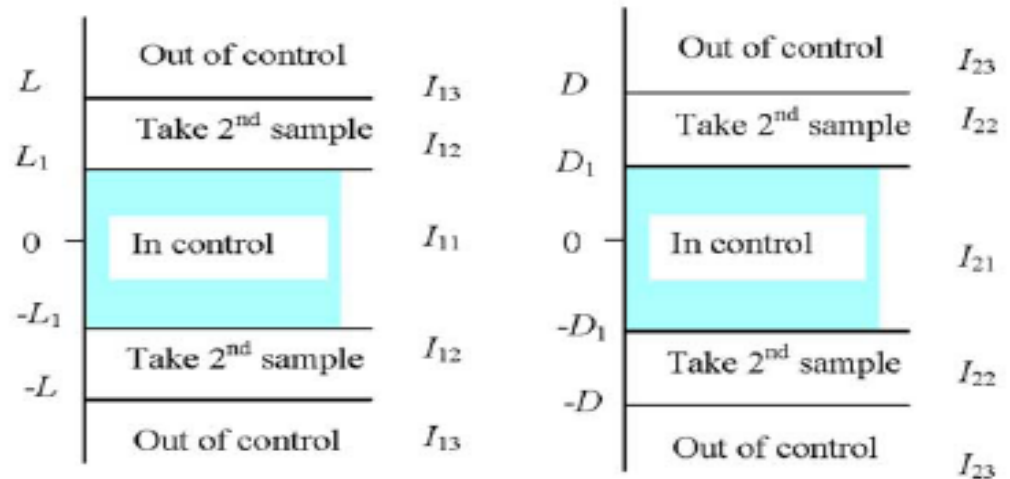
$$P_r[DS s \text{ chart signals} | \sigma = \sigma_0] \leq \alpha_S. \quad (4)$$

■ 為了計算方便，將式子簡化

$$A = (\bar{X}_1 \in I_{11}) \cap (s_1 \in I_{22}),$$

$$B = (\bar{X}_1 \in I_{12}) \cap (s_1 \in I_{22}),$$

$$C = (\bar{X}_1 \in I_{12}) \cap (s_1 \in I_{21}).$$



Then the probability of taking the second sample is equal to $P(A \cup B \cup C)$, which could be expressed as follow:

$$P(\bar{X}_1 \in I_{11})P(s_1 \in I_{22}) + P(\bar{X}_1 \in I_{12})P(s_1 \in I_{22}) + P(\bar{X}_1 \in I_{12})P(s_1 \in I_{21}).$$

■ Joint DS $\bar{X}$ and s charts 之 Type I error 為

$\alpha = \alpha_{\bar{X}} + \alpha_s - \alpha_{\bar{X}}\alpha_s$, Type II error 為 $\beta = \beta_{\bar{X}}\beta_s$; 令 $P_{a1\bar{X}}$ and $P_{a2\bar{X}}$

分別為 DS $\bar{X}$ chart 第一階段和第二階段都在管制界限之機率, P_{a1s} and P_{a2s} 分別為 DS s chart 第一階段和第二階段都在管制界限之機率。

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta_{\bar{X}}\beta_s}$$

$$\text{Min}_{n_1, n_2, L, L_1, L_2, D, D_1, D_2} \frac{1}{1 - (P_{a1\bar{X}} + P_{a2\bar{X}} | \mu = \mu_1, \sigma = \sigma_1)(P_{a1s} + P_{a2s} | \mu = \mu_1, \sigma = \sigma_1)} \quad (5)$$

$$\text{Subject to: } n_1 + n_2 \times \{\Pr(\bar{X}_1 \in I_{11}) \Pr(s_1 \in I_{22}) + \Pr(\bar{X}_1 \in I_{12}) \Pr(s_1 \in I_{22}) + \Pr(\bar{X}_1 \in I_{12}) \Pr(s_1 \in I_{21})\} \leq N_{\max} \quad (6)$$

$$1 - (P_{a1\bar{X}} + P_{a2\bar{X}} | \mu = \mu_0, \sigma = \sigma_0) \leq \alpha_{\bar{X}} \quad (7)$$

$$1 - (P_{a1s} + P_{a2s} | \mu = \mu_0, \sigma = \sigma_0) \leq \alpha_s \quad (8)$$

$$L_1 < L, D_1 < D. \quad (9)$$

- 根據 Daudin (1992)建議 L 必須要大於標準值3或3.09，故最佳選擇為 $L=4$ 或 5 ； L_1 必須低於警告界線之標準值2，因此 L_1 最佳選擇介於1.3~1.8。 D, D_1, D_2 也使用相同的界限值。

DS x-bar chart

- 當第一階段製程有偏移時($\delta > 0, \lambda > 1$)，可表示成：

$$P_{a1\bar{X}} = \Pr[\bar{X}_1 \in I_{11}] = \Phi\left[\frac{1}{\lambda}(\sqrt{n_1}\delta + L_1)\right] - \Phi\left[\frac{1}{\lambda}(\sqrt{n_1}\delta - L_1)\right]$$

- 當第二階段製程有偏移時可表示成：

$$P_{a2\bar{X}} = \int_{z \in I_{12}^*} \left\{ \Phi\left[c\left(\frac{L_2 + r\delta}{\lambda}\right) - \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}z\right] - \Phi\left[c\left(\frac{-L_2 + r\delta}{\lambda}\right) - \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}z\right] \right\} \varphi(z) dz$$

$$\text{其中， } I_{12}^* = \left[\frac{1}{\lambda}(\sqrt{n_1}\delta - L), \frac{1}{\lambda}(\sqrt{n_1}\delta - L_1)\right] \cup \left[\frac{1}{\lambda}(\sqrt{n_1}\delta + L_1), \frac{1}{\lambda}(\sqrt{n_1}\delta + L)\right]$$

- $P_{a\bar{X}}$ 表示in control之機率，故 $P_{a\bar{X}} = P_{a1\bar{X}} + P_{a2\bar{X}}$

則out-of-control之機率為 $1 - P_{a\bar{X}}$

DS s chart

- 第一、二階段之樣本標準差轉換為卡方隨機變數：

$$x_1 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2}{\sigma_1^2}, \quad \text{with } n_1 - 1 \text{ degrees of freedom,}$$

$$x_2 = \frac{(n_2 - 1)s_2^2}{\sigma_2^2}, \quad \text{with } n_2 - 1 \text{ degrees of freedom.}$$

- 當第一階段製程有偏移時可表示成：

$$P_{a1s} = \int_{x_1 \in I_{21}^*} \frac{1}{2^{\left(\frac{n_1-1}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{n_1-1}{2}\right)} x_1^{\left(\frac{n_1-1}{2}\right)-1} e^{-x_1/2} dx_1$$

- 當第二階段製程有偏移時可表示成：

$$P_{a2s} = \int_{x_1 \in I_{21}^*} \left[\int_{x_2 \in [A, B]} \frac{x_2^{\left(\frac{n_2-1}{2}\right)-1} e^{-x_2/2}}{2^{\left(\frac{n_2-1}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{n_2-1}{2}\right)} dx_2 \right] \frac{x_1^{\left(\frac{n_1-1}{2}\right)-1} e^{-x_1/2}}{2^{\left(\frac{n_1-1}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{n_1-1}{2}\right)} dx_1$$

- P_{as} 表示in control之機率，故 $P_{as} = P_{a1s} + P_{a2s}$

則out-of-control之機率為 $1 - P_{as}$

$$\text{Min}_{n_1, n_2, L, L_1, L_2, D, D_1, D_2} \frac{1}{1 - \beta_{\bar{X}} \beta_S}$$

$$\text{Subject to: } n_1 + n_2 \times \left([\Phi(L_1) - \Phi(-L_1)] \times \int_{x_1 \in I_{22}^*} \frac{x_1^{\left(\frac{n_1-1}{2}\right)-1} e^{-x_1/2}}{2^{\left(\frac{n_1-1}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{n_1-1}{2}\right)} dx_1 \right. \\ \left. + \{[\Phi(-L_1) - \Phi(-L)] + [\Phi(L) - \Phi(L_1)]\} \times \int_{x_1 \in I_{22}^*} \frac{x_1^{\left(\frac{n_1-1}{2}\right)-1} e^{-x_1/2}}{2^{\left(\frac{n_1-1}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{n_1-1}{2}\right)} dx_1 \right. \\ \left. + \{[\Phi(-L_1) - \Phi(-L)] + [\Phi(L) - \Phi(L_1)]\} \times \int_{x_1 \in I_{21}^*} \frac{x_1^{\left(\frac{n_1-1}{2}\right)-1} e^{-x_1/2}}{2^{\left(\frac{n_1-1}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{n_1-1}{2}\right)} dx_1 \right) \leq N_{\max}$$

$$P_r[\text{False alarm} | \mu = \mu_0, \lambda = 1] \leq \alpha_{\bar{X}}, \text{ i.e., } \left\{ 1 - \{\Phi[L_1] - \Phi[-L_1]\} \right. \\ \left. - \int_{z \in I_{12}^*} \left[\Phi\left(cL_2 - \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}z\right) - \Phi\left(-cL_2 - \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}z\right) \right] \varphi(z) dz \right\} \leq \alpha_{\bar{X}}$$

$$P_r[\text{False alarm} | \sigma = \sigma_0] \leq \alpha_S, \text{ i.e.,}$$

$$1 - \left\{ \int_{x_1 \in I_{21}^*} \frac{x_1^{\left(\frac{n_1-1}{2}\right)-1} e^{-x_1/2}}{2^{\left(\frac{n_1-1}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{n_1-1}{2}\right)} dx_1 \right\} \\ - \int_{x_1 \in I_{22}^*} \left[\int_{x_2 \in [A, B]} \frac{x_2^{\left(\frac{n_2-1}{2}\right)-1} e^{-x_2/2}}{2^{\left(\frac{n_2-1}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{n_2-1}{2}\right)} dx_2 \right] \frac{x_1^{\left(\frac{n_1-1}{2}\right)-1} e^{-x_1/2}}{2^{\left(\frac{n_1-1}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{n_1-1}{2}\right)} dx_1 \leq \alpha_S$$

$$L_1 < L, D_1 < D.$$

Solving the optimization problem using genetic algorithm

- GAs 適合用來找整體最佳解，Holland(1975) 引用GAs解決穩健最佳化問題。
- GAs之步驟： 1)隨機取得初始解；2)評估適存性；3)複製與突變；4)產生新解
- 得到結果：樣本大小為1,000；交配率為0.5；突變率為0.06

5. Performance of the joint DS $\bar{X}$ and s chart

- 5.1 與 Gan(1995) 提出之 combined EWMA and CUSUM schemes 及 Domangue and Patch (1991) 提出之 omnibus EWMA scheme 做比較。
◦ 每個樣本組觀測個數設定為 5。

Table 1
Parameters of the compared schemes

Scheme	Scheme parameter
Joint DS-1	$L_1=1.72, L=3.40, L_2=2.90, D_1=1.603, D=3.833, D_2=2.92, n_1=3, n_2=12$
EE ₁	$\lambda_M=0.134, h_M=-0.345, H_M=0.345, \lambda_V=0.106, h_V=-0.867, H_V=0.215$
EE _{1U}	$\lambda_M=0.134, h_M=-0.345, H_M=0.345, \lambda_V=0.043, H_V=0.144$
CC	$k_M=0.224, h_M=2.268, k_{VU}=0.055, H_V=4.006, k_{VL}=0.666, h_V=-5.054$
O1	$r=0.5, L=2.536$
O2	$r=0.025, L=1.587$

Table 2
ARL values of the DS, EE₁, EE_{1U}, CC, O1, O2 schemes (n=5)

Scheme	δ	λ						
		1.00	1.10	1.20	1.3	1.40	1.50	2.00
Joint DS-I	0.00	250.0	69.70	25.54	12.03	6.89	4.57	1.79
EE ₁		250.0	67.69	25.64	14.80	10.44	8.12	4.30
EE _{1U}		250.0	57.20	22.63	13.02	9.124	7.00	3.65
CC		250.0	71.44	26.65	14.92	10.34	8.02	4.14
O1		250.0	151.59	72.50	42.18	27.05	19.15	7.06
O2		250.0	81.70	42.30	28.37	21.08	16.93	9.07
Joint DS-I	0.169	131.32	50.18268	21.48	10.88	6.48	4.39	1.77
EE ₁		52.898	34.68	20.23	13.26	9.78	7.87	4.251
EE _{1U}		53.094	31.80	18.14	11.94	8.62	6.82	3.62
CC		61.061	37.75	20.87	13.38	9.82	7.77	4.08
O1		205.55	94.68	52.31	32.14	22.75	16.72	6.77
O2		103.26	50.52	32.29	23.95	18.83	15.59	8.71
Joint DS-I	0.25	74.41	35.73	17.70	9.71	6.02	4.18	1.75
EE ₁		26.90	21.84	16.15	11.78	9.21	7.54	4.19
EE _{1U}		26.84	20.84	14.72	10.61	8.19	6.61	3.58
CC		30.70	23.43	16.92	12.02	9.15	7.45	4.10
O1		112.77	61.73	36.88	25.70	18.59	14.27	6.35
O2		54.21	35.37	25.52	20.14	16.71	14.09	8.53
Joint DS-I	0.50	13.56	10.44	7.77	5.67	4.22	3.27	1.65
EE ₁		8.59	8.47	8.12	7.48	6.76	6.06	3.94
EE _{1U}		8.63	8.40	7.81	7.05	6.29	5.49	3.42
CC		8.84	8.58	8.26	7.58	6.74	6.03	3.81
O1		19.26	15.38	12.80	10.80	9.21	8.15	5.02
O2		14.03	13.00	12.06	11.23	10.41	9.71	7.19
Joint DS-I	0.75	4.19	3.93	3.59	3.18	2.77	2.41	1.52
EE ₁		5.02	5.02	5.01	4.95	4.45	4.62	3.58
EE _{1U}		4.99	4.99	4.98	4.84	4.64	4.35	3.18
CC		5.01	5.08	5.00	4.95	4.82	4.61	3.47
O1		6.19	5.87	5.56	5.25	5.04	4.76	3.80
O2		7.02	7.04	6.99	6.95	6.85	6.67	5.82
Joint DS-I	1.00	2.14	2.15	2.13	2.06	1.95	1.83	1.39
EE ₁		3.65	3.64	3.61	3.60	3.59	3.57	3.16
EE _{1U}		3.59	3.60	3.57	3.60	3.56	3.49	2.88
CC		3.55	3.59	3.61	3.59	3.58	3.54	3.31
O1		3.22	3.24	3.21	3.18	3.16	3.12	2.88
O2		4.73	4.80	4.87	4.92	4.89	4.91	4.74

- $\delta \geq 0.75$, $\lambda \geq 1.3$ 時，DS優於其它比較之管制圖。
- $\delta \leq 0.5$, $\lambda \leq 1.2$ 時，combined EWMA and CUSUM schemes 優於DS scheme 。
- Yashchin(1987) and Lowry(1992)指出EWMA and CUSUM charts在製程偏移發生相反方向時沒辦法馬上偵測出來，若能忽略inertia(惰性)問題，那麼EWMA and CUSUM charts就會優於joint DS chart

5.2 Comparison with joint STD, VSS, and TSS charts

■ 與 standard joint $\bar{x}$ and R chart (STD),
STD、VSS、TSS之
資料直接從Costa and
Rahim (2002)取得
Sampling size (VSS), and two-stage
(TSS) schemes比較。

Parameters of the compared schemes

Scheme	Scheme parameter
Joint DS-2	$L_1=1.552; L=3.922, L_2=2.922; D_1=1.613, D=4.396, D_2=3.016; n_1=2, n_2=16$
Joint DS-3	$L_1=1.664; L=3.907, L_2=3.015; D_1=1.659, D=4.171, D_2=3.065; n_1=3, n_2=12$
STD	$N=5; k=3.250; k_R(n)=5.432$
TSS1	$n_0=15; k_0=3.100; k_R(n_0)=5.786; w_0=1.068$
TSS2	$n_0=20; k_0=3.100; k_R(n_0)=5.829; w_0=1.252$
VSS1	$n_1=2; n_2=15; k=3.250; k_R(n_1)=4.594; k_R(n_2)=6.188$
VSS2	$n_1=2; n_2=20; k=3.250; k_R(n_1)=4.594; k_R(n_2)=6.366$

■ ARL=433，每個樣本組觀測個數設定為5。

- Joint DS schemes 皆優於比較之管制圖，除了 $\delta=0$ ， $\lambda=1.1$ 以及 $\delta=0$ ， $\lambda=1.2$ 時稍微差於 TSS2
- Joint DS and s charts 具有決定第一階段與第二階段之 $\bar{x}$ 樣本大小之彈性，相對於 TSS 來得好。
- STD 對小偏移較不敏感，表中算是績效最差的管制圖；與 VSS 比較，joint DS charts 使用相同的樣本點計算第二次抽樣，因此會有較小的 ARL 來偵測偏移。

5.3 The distribution of the Type I error probability

- 根據Gan，型I誤差是會平均落在 $\alpha_{\bar{X}}$ 與 α_S 間。作者試圖找出在不同的型I誤差下對ARL會有怎樣的影響。
- table5：P(type I error)=0.004, $ARL_0=250$

Table 5

The ARL performance of Joint DS-1 chart optimized for detection of shifts with $\delta=0.169$ and $\lambda=1.188$ for different $\alpha_{\bar{X}}$ and α_S values

Type I error probability			ARL				
α	$\alpha_{\bar{X}}$	α_S	DS $\bar{X}$ ($\delta=0.169$)	DS s ($\lambda=1.188$)	Joint DS-1 ($\delta=0.169, \lambda=1.888$)	Joint DS-1 ($\delta=0, \lambda=1.888$)	Joint DS-1 ($\delta=0.169, \lambda=1$)
0.004	0.000509	0.0035	140.16	34.22	27.66	30.96	182.30
	0.001	0.003	91.41	37.61	26.86	31.10	161.74
	0.001509	0.0025	68.17	38.58	24.87	29.68	142.10
	0.002	0.002	58.70	38.76	23.58	28.41	131.32
	0.0025	0.001509	51.88	43.69	23.97	29.36	125.15
	0.003	0.001	47.13	54.44	25.51	31.70	125.81
	0.0035	0.000509	41.36	87.65	28.32	37.89	113.37

大

小

■ Table6,table7 : $P(\text{Type I error})=0.00230947$, $ARL_0=433$

Table 6

The ARL performance of Joint DS-2 chart optimized for detection of shifts with $\delta=0.5$ and $\lambda=1.1$ for different $\alpha_{\bar{X}}$ and α_S values

Type I error probability			ARL				
α	$\alpha_{\bar{X}}$	α_S	DS $\bar{X}$ ($\delta=0.5$)	DS s ($\lambda=1.1$)	Joint DS-2 ($\delta=0.5, \lambda=1.1$)	Joint DS-2 ($\delta=0, \lambda=1.1$)	Joint DS-2 ($\delta=0.5, \lambda=1$)
0.00230947	0.00031	0.002	16.12	118.48	14.30	106.53	19.25
	0.00081	0.0015	13.40	153.15	12.40	115.38	15.86
	0.0011554	0.0011554	11.53	168.51	10.85	112.51	13.49
	0.0015	0.00081	11.10	187.57	10.53	108.78	13.15
	0.002	0.00031	10.96	368.29	10.67	126.24	13.13

Table 7

The ARL performance of Joint DS-3 chart optimized for detection of shifts with $\delta=0.75$ and $\lambda=1.5$ for different $\alpha_{\bar{X}}$ and α_S values

Type I error probability			ARL				
α	$\alpha_{\bar{X}}$	α_S	DS $\bar{X}$ ($\delta=0.75$)	DS s ($\lambda=1.5$)	Joint DS-3 ($\delta=0.75, \lambda=1.5$)	Joint DS-3 ($\delta=0, \lambda=1.5$)	Joint DS -3 ($\delta=0.75, \lambda=1$)
0.00230947	0.00031	0.002	4.51983	5.47648	2.72968	5.18060	5.67095
	0.00081	0.0015	4.02355	6.02457	2.67902	5.42634	4.82093
	0.0011554	0.0011554	3.68554	6.139137	2.56395	5.34547	4.28464
	0.0015	0.00081	3.47379	6.53993	2.52041	5.46896	3.99137
	0.002	0.00031	3.34564	7.27650	2.53005	5.70698	3.88237

- 從table5~7可看出， $\alpha_{\bar{X}}$ 增加DS $\bar{X}$ 之ARL就會減少； α_s 增加DS s 之ARL就會減少。表示只要Type I error 增加，管制界限會縮小，因此能提升發出超出管制界限信號之機會。
- 在獨立之DS chart($\alpha_{\bar{X}}$ for $\bar{X}$ chart or α_s for s chart)中，ARL值會跟著 α 值增加而減少；只有平均數發生偏移狀況下，ARL只會跟著 $\alpha_{\bar{X}}$ 改變

- 在 $\delta > 0$ ， $\lambda > 1$ 情況下，當 $\alpha_{\bar{X}}$ 變小或 α_S 變大 ARL 會變小，明顯地，在型 I 誤差介於 $\alpha_{\bar{X}}$ 與 α_S 之間時，ARL 會有最佳值 (Min ARL)
- 在 $\delta = 0$ ， $\lambda > 1$ 情況下，ARL 值沒有規律地增加或減少，因此，很難判斷 ARL 與 α 之間的關係

conclusion

- 本篇paper提出joint DS $\bar{X}$ and s chart 之統計設計，以最小化 ARL_1 為目標函數，給定型I誤差和平均樣本大小之限制式結合基因演算法、Monte Carlo simulation 求最佳解。
- 與過去文獻提出之管制圖做比較；並且試圖提出 ARL 與 α 的關係。

Table 4
ARL values for the joint DS, STD, TSS and VSS charts ($n=5$)

Scheme	δ	λ						
		1.00	1.10	1.20	1.3	1.40	1.50	2.00
Joint DS-2	0.00	433.0	112.50	37.99	16.83	9.30	6.05	2.33
Joint DS-3		433.0	106.59	35.31	15.43	8.38	5.34	1.91
STD ^a		433.0	133.5	53.64	26.24	14.89	9.46	2.64
TSS1 ^a		433.0	111.9	39.37	17.72	9.65	6.09	2.06
TSS2 ^a		433.0	103.7	35.19	15.67	8.58	5.50	2.08
VSS1 ^a		433.0	138.7	51.62	22.14	11.18	6.67	2.24
VSS2 ^a		433.0	140.6	51.95	21.67	10.66	6.29	2.26
Joint DS-2	0.50	13.49	10.85	8.45	6.38	4.85	3.82	2.01
Joint DS-3		15.10	11.77	8.87	6.48	2.12	3.64	1.73
STD ^a		56.59	32.65	20.21	13.23	9.12	6.62	2.41
TSS1 ^a		17.25	13.10	9.81	7.24	5.40	4.14	1.93
TSS2 ^a		14.60	11.39	8.70	6.52	4.93	3.85	1.98
VSS1 ^a		21.41	14.87	10.54	7.58	5.60	4.31	2.11
VSS2 ^a		16.14	11.95	8.92	6.69	5.11	4.04	2.15
Joint DS-2	0.75	4.25	4.03	3.74	3.37	2.98	2.63	1.76
Joint DS-3		4.28	4.06	3.76	3.37	2.94	2.56	1.57
STD ^a		16.94	12.43	9.44	7.33	5.80	4.67	2.17
TSS1 ^a		4.85	4.52	4.16	3.74	3.31	2.92	1.81
TSS2 ^a		4.46	4.17	3.86	3.51	3.15	2.81	1.87
VSS1 ^a		5.02	4.64	4.24	3.83	3.43	3.06	1.98
VSS2 ^a		4.55	4.22	3.90	3.58	3.26	2.96	2.03
Joint DS-2	1.00	2.34	2.33	2.29	2.20	2.09	1.97	1.55
Joint DS-3		2.10	2.13	2.13	2.08	1.99	1.88	1.42
STD ^a		6.39	5.49	4.79	4.20	3.69	3.25	1.92
TSS1 ^a		2.44	2.43	2.40	2.35	2.26	2.16	1.68
TSS2 ^a		2.57	2.51	2.45	2.38	2.29	2.19	1.77
VSS1 ^a		2.79	2.73	2.66	2.58	2.48	2.36	1.85
VSS2 ^a		2.95	2.83	2.72	2.61	2.50	2.39	1.91
Joint DS-2	1.25	1.71	1.73	1.73	1.71	1.67	1.62	1.41
Joint DS-3		1.46	1.50	1.53	1.54	1.53	1.50	1.30
STD ^a		3.07	2.92	2.78	2.63	2.48	2.33	1.69
TSS1 ^a		1.76	1.78	1.80	1.80	1.78	1.76	1.57
TSS2 ^a		1.99	1.97	1.95	1.93	1.90	1.87	1.67
VSS1 ^a		2.17	2.15	2.12	2.08	2.04	2.00	1.73
VSS2 ^a		2.38	2.32	2.26	2.20	2.14	2.08	1.80
Joint DS-2	1.50	1.39	1.42	1.45	1.45	1.44	1.42	1.31
Joint DS-3		1.21	1.24	1.27	1.29	1.30	1.29	1.21
STD ^a		1.84	1.85	1.85	1.84	1.81	1.77	1.50
TSS1 ^a		1.49	1.52	1.53	1.55	1.55	1.55	1.48
TSS2 ^a		1.67	1.68	1.69	1.69	1.69	1.68	1.58
VSS1 ^a		1.89	1.87	1.86	1.83	1.81	1.79	1.63
VSS2 ^a		2.05	2.02	1.99	1.96	1.92	1.88	1.70

