



A new approach to robust economic design of control charts

出處：Applied Soft Computing 7 (2007) 211–228

作者：Vijaya Babu Vommi, Murty S.N. Seetala

報告者：鄭欣卉

指導老師：童超塵教授



Contents

- Introduction
- Notation
- Duncan's model of economic design
- Concept of risk
- Robust economic design of control chart with multiple parameter variation
- Statistically constrained designs
- Summary

Introduction

- Shewart \bar{X} 管制圖參數設計包含樣本大小(n)、抽樣間隔(h)、管制界線係數(k)的選擇。
- 管制圖設計一般被分為三種：
 - (i) 啟發設計
 - (ii) 統計設計
 - (iii) 經濟設計

Introduction

- Duncan(1956)提出 \bar{x} 管制圖最適經濟設計的經濟模型-單一可歸屬原因模型。
- Goel et al.(1968)提出一個計算程序可解出Duncan單一可歸屬原因模型。
- Lorenzen and Vance(1986)提出設計管制圖經濟性模式。
- Woodall(1986)指出經濟設計的弱點。
- Saniga(1989)提出結合經濟與統計觀點的管制圖經濟統計性設計。

Introduction

- McWilliams(1989) 提出在 Lorenzen and Vance 的設計管制圖經濟性模式中加入韋伯製程失效機制。
- Surtihadi and Raghavachari(1994)證明固定抽樣區間下管制圖近似指數製程失效機制。
- Benerjee and Rahim(1988)提出變動抽樣間隔策略較傳統固定抽樣間隔做法的優越性。
- Prabhu et al.(1994)提出適應性 \bar{X} 管制圖。

Notation

ATS_o	average time to signal out-of-control situation
b	fixed cost per sample
c	cost per unit sampled
d	time to search and fix the process
D	design vector of control chart parameters obtained from imprecise input parameters
D^*	design vector of control chart parameters obtained from true input parameters
g	time to test and interpret the result per sample unit
h	sampling interval
k	control limit coefficient
M	hourly cost penalty of running the process in out-of-control ($V_0 - V_1$)
$MR_{\mathfrak{W}}$	maximum risk corresponding to a design parameter set \mathfrak{W}
n	sample size



Notation

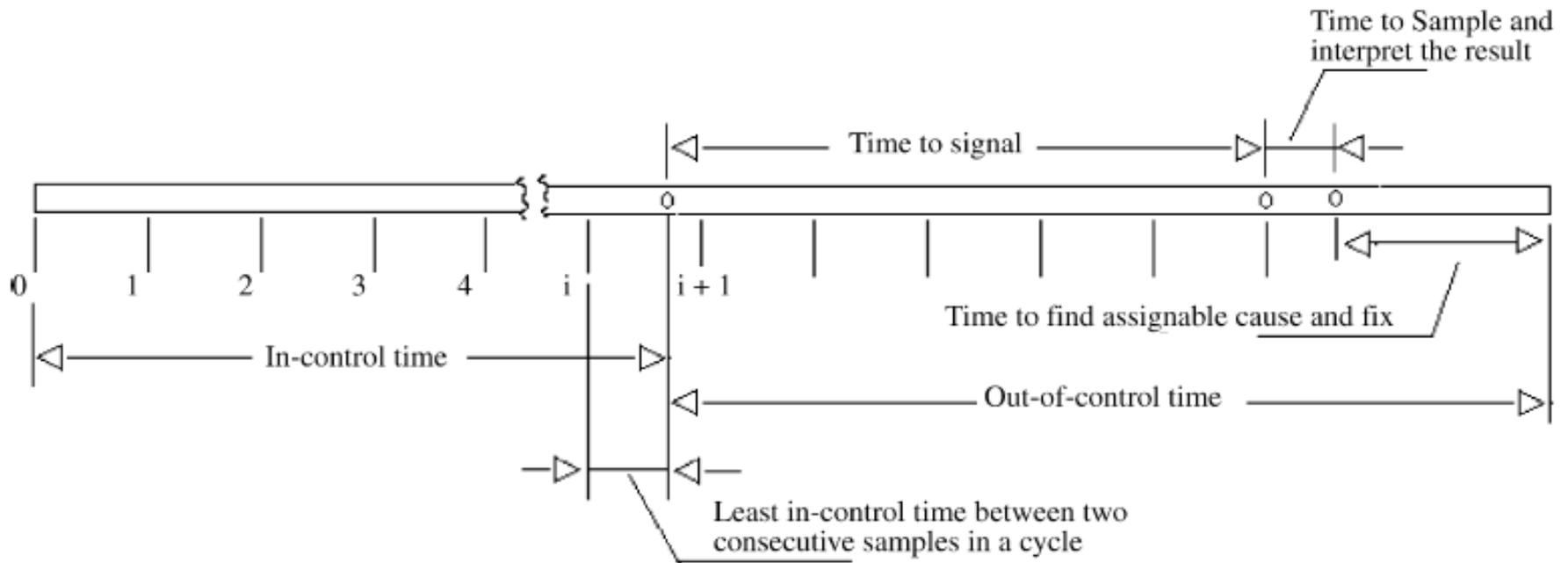
NIC	net income per cycle
NIH	net income per hour
p	power of the chart ($1 - \beta$)
sus	stochastic universal sampling
T	quality control cycle time
V_0	profit per hour while the process is running in-control
V_1	profit per hour while the process is running out-of-control
W	cost of finding and fixing an assignable cause
xosp	single point cross over
Y	cost of false alarm

Notation

α	probability of type-I error
β	probability of type-II error
δ	ratio of magnitude of shift in process mean to the standard deviation of the process, in short, shift parameter
λ	process failure rate
μ	mean of the process
$\mathbf{\Theta}$	a design (input) parameter set
Ω	parameter space
Ψ	a true parameter set
σ	standard deviation of the process
$(.)_D$	denotes a design parameter
$(.)_H$	upper bound for any parameter
$(.)_L$	lower bound for any parameter
$(.)_T$	denotes a true parameter



A quality control cycle for a continuous process



Duncan's model of economic design-週期平均時間

- 管制狀態內的平均時間為 $\frac{1}{\lambda}$ 。
- 異常發生在第 j 與第 $j+1$ 個樣本間，則異常發生的平均時間為：

$$h/p - (h/2 - \lambda h^2/12); = h(1/p - 0.5 + \lambda h/12)$$

- 平均抽樣與檢驗時間為 gn 。
- 發現異常並且修復製程時間為 d 。
- 有此可知一個循環的平均時間長為：

$$E(T) = 1/\lambda + h(1/p - 0.5 + \lambda h/12) + gn + d \quad (1)$$



Duncan's model of economic design-成本模式

- 管制內平均收入 = V_0/λ
- 管制外平均收入 = $V_1[h(1/p - 0.5 + \lambda h/12) + gn + d]$
- 平均抽樣成本 = $(b + cn)E(T)/h$
- 錯誤警報平均成本 = $\alpha Y/\lambda h$
- 修復製程平均成本 = W
- 每週期時間的平均淨收入

$$E(\text{NIC}) = V_0/\lambda + V_1[h(1/p - 0.5 + \lambda h/12) + gn + d] \\ - (b + cn)E(T)/h - \alpha Y/\lambda h - W$$

(2)

Duncan's model of economic design-成本模式

■ 單位時間淨收入 = $E(\text{NIH}) = E(\text{NIC})/E(T) = V_0 - L$ (3)(4)

■ 由(1)(2)(4)方程式得到單位時間損失函數：

$$L = \frac{b + cn}{h} + \frac{\lambda MB + \alpha Y/h + \lambda W}{1 + \lambda B} \quad (5)$$

where,

$$M = V_0 - V_1$$

$$a = 1/p - 0.5 - \lambda h/12$$

$$B = ah + gn + d$$

$$\alpha = 2\Phi(-k)$$



$$p = \Phi(-\delta\sqrt{n} - k) + \Phi(\delta\sqrt{n} - k)$$

Concept of risk

- 經濟設計管制圖使損失成本最小其包含9個輸入參數 ($b, c, W, Y, M, \lambda, \delta, g, d$)。
- 使用計量範圍來估計參數，以提高估計到真實參數的機率。
- 將每個參數切割成 X 部分，因此共有 X^9 個參數組合。
- 從參數空間任意選擇一個參數組合有兩種情況：
 - (i)設計參數與真實參數一樣。
 - (ii)設計參數與真實參數不同。

Concept of risk-損失成本

- 任意選擇一個參數組合的損失成本函數為：

$$L = \frac{b_D + c_D n}{h} + \frac{\lambda_D M_D B_D + \alpha_D Y_D / h + \lambda_D W_D}{1 + \lambda_D B_D} \quad (6)$$

where $\alpha_D = 2\Phi(-k)$

$$B_D = a_D h + g_D n + d_D$$

and

$$a = \left(\frac{1}{p_D} - \frac{1}{2} + \frac{\lambda_D h}{12} \right)$$

$$p_D = \Phi(-\delta_D \sqrt{n} - k) + \Phi(\delta_D \sqrt{n} - k)$$

Concept of risk-損失成本

- 考慮設計參數組合與真實參數組合下之真實損失成本為：

$$L(D, \Psi) = \frac{b_T + c_T n}{h} + \frac{\lambda_T M_T B_T + \alpha_T Y_T / h + \lambda_T W_T}{1 + \lambda_T B_T} \quad (7)$$

where $\alpha_T = 2\Phi(-k)$

$$B_T = a_T h + g_T n + d_T$$

$$a_T = \left(\frac{1}{p_T} - \frac{1}{2} + \frac{\lambda_T h}{12} \right)$$



$$p_T = \Phi(-\delta_T \sqrt{n} - k) + \Phi(\delta_T \sqrt{n} - k)$$

Concept of risk-損失成本

- 管制圖參數為 (n^*, h^*, k^*) ，最佳損失成本為：

$$L(D^*, \Psi) = \frac{b_T + c_T n^*}{h^*} + \frac{\lambda_T M_T B^* + \alpha^* Y_T / h^* + \lambda_T W_T}{1 + \lambda_T B^*} \quad (8)$$

where $\alpha^* = 2\Phi(-k^*)$

$$B^* = a^* h^* + g_T n^* + d_T$$

$$a^* = \left(\frac{1}{p^*} - \frac{1}{2} + \frac{\lambda_T h^*}{12} \right)$$

$$p^* = \Phi(-\delta_T \sqrt{n^*} - k^*) + \Phi(\delta_T \sqrt{n^*} - k^*)$$

Concept of risk-懲罰成本

- 由方程式(7)(8) , 真實損失成本 - 最佳損失成本

$$\text{Cost penalty} = L(D, \Psi) - L(D^*, \Psi)$$

- 風險-懲罰成本以百分比來表示為：

$$\text{Risk}(\%) = 100 \times \frac{L(D, \Psi) - L(D^*, \Psi)}{L(D^*, \Psi)} \quad (10)$$

Concept of risk

- 設計參數與真實參數相同其風險為0，其他皆大於1。
- 風險視真實參數而變化。
- 給定一個參數設計組合 ω ，其存在最大風險：

$$MR_{\omega}(\%) = 100 \times \max \left\{ \frac{L(D, \Psi) - L(D^*, \Psi)}{L(D^*, \Psi)} \right\}$$

$$\forall \Psi = (b_T, c_T, W_T, Y_T, M_T, \lambda_T, \delta_T, g_T, d_T)$$

such that

$$\begin{aligned} (b_L \leq b_T \leq b_H), & \quad (c_L \leq c_T \leq c_H), \quad (W_L \leq W_T \leq W_H), & \quad (Y_L \leq Y_T : (11)), \\ (M_L \leq M_T \leq M_H), & \quad (\lambda_L \leq \lambda_T \leq \lambda_H), \quad (\delta_L \leq \delta_T \leq \delta_H), & \quad (g_L \leq g_T \leq g_H), \\ (d_L \leq d_T \leq d_H). & \end{aligned}$$



Concept of risk

- 找到每個參數對應所有可能真實參數的最大風險，最小化所有最大風險，被認為是管制圖最佳參數組合設計。

Concept of risk

- 基因演算法是一個用來尋找導致最大風險的參數設計組合的有效工具。
 - 步驟一：找出使損失成本最小化之管制圖參數組合(n,h,k)
 - 步驟二：任意選取一些有可能的真實參數組合
 - 步驟三：找出最佳成本
 - 步驟四：利用管制圖參數組合(n,h,k)和真實參數計算出真實成本，再利用真實成本與最佳成本計算出各個真實參數的風險
 - 步驟五：計算真實參數組合適應值，較高的生存下來
 - 步驟六：透過複製、交配、突變產生新的參數組合
 - 步驟七：重複步驟三到步驟六，直到得到最大風險值
 - 步驟八：得到最大風險的真實參數組合

Concept of risk

- Control chart input parameters: Duncan's example no. 1

b	0.5
c	0.1
W	25
Y	50
M	100
λ	0.01
δ	2
g	0.05
d	2

Concept of risk

- Range of cost and process parameters at 50% precision

S. no.	Cost/process parameter	Range of each parameter
1	Fixed cost of sampling (b)	$0.25 \leq b_T \leq 0.75$
2	Variable cost of sampling (c)	$0.05 \leq c_T \leq 0.15$
3	Cost of finding assignable cause and fixing (W)	$12.5 \leq W_T \leq 37.5$
4	Cost of false alarms (Y)	$25 \leq Y_T \leq 75$
5	Cost of running out-of-control (M)	$50 \leq M_T \leq 150$
6	Process failure rate (λ)	$0.005 \leq \lambda_T \leq 0.015$
7	Average shift in the process mean (δ)	$1.0 \leq \delta_T \leq 3.0$
8	Time to sample and interpret per unit (g)	$0.025 \leq g_T \leq 0.075$
9	Time to find assignable cause and repair it (d)	$1.0 \leq d_T \leq 3.0$

Concept of risk

- 利用以上設計參數組合得到損失成本最佳化之管制圖參數組合為 $n=5$, $h=1.37$, $k=3.08$
- GA parameters taken in the study

S. no.	GA parameters	Magnitude/method
1	Population size	30
2	Selection method	Stochastic universal sampling
3	Type of cross over	Single point
4	Probability of cross over	0.7
5	Probability of mutation	0.0175
6	Strategy	Elitist
7	Generation gap	0.9
8	Maximum generations	200

Concept of risk

- True parameter set corresponding to maximum risk

b_T		b_L (0.25)
c_T		c_L (0.05)
W_T		W_L (12.5)
Y_T		Y_L (25)
M_T	最大風險=171.81%	M_H (150)
λ_T		λ_H (0.015)
δ_T		δ_L (1.0)
g_T		g_L (0.25)
d_T		d_L (1.0)

Robust economic design of control chart with multiple parameter variation

- 成本參數與製程參數表達成一個範圍，形成一個設計參數空間。
- 適當地將設計參數範圍切割成幾個部分。
- 最佳參數設計組合為 ϖ_0 之最小化最大風險為：

$$\varpi_0 = \min_{\varpi \in \Omega} \{MR_{\varpi}\} \quad \forall \varpi \quad (12)$$

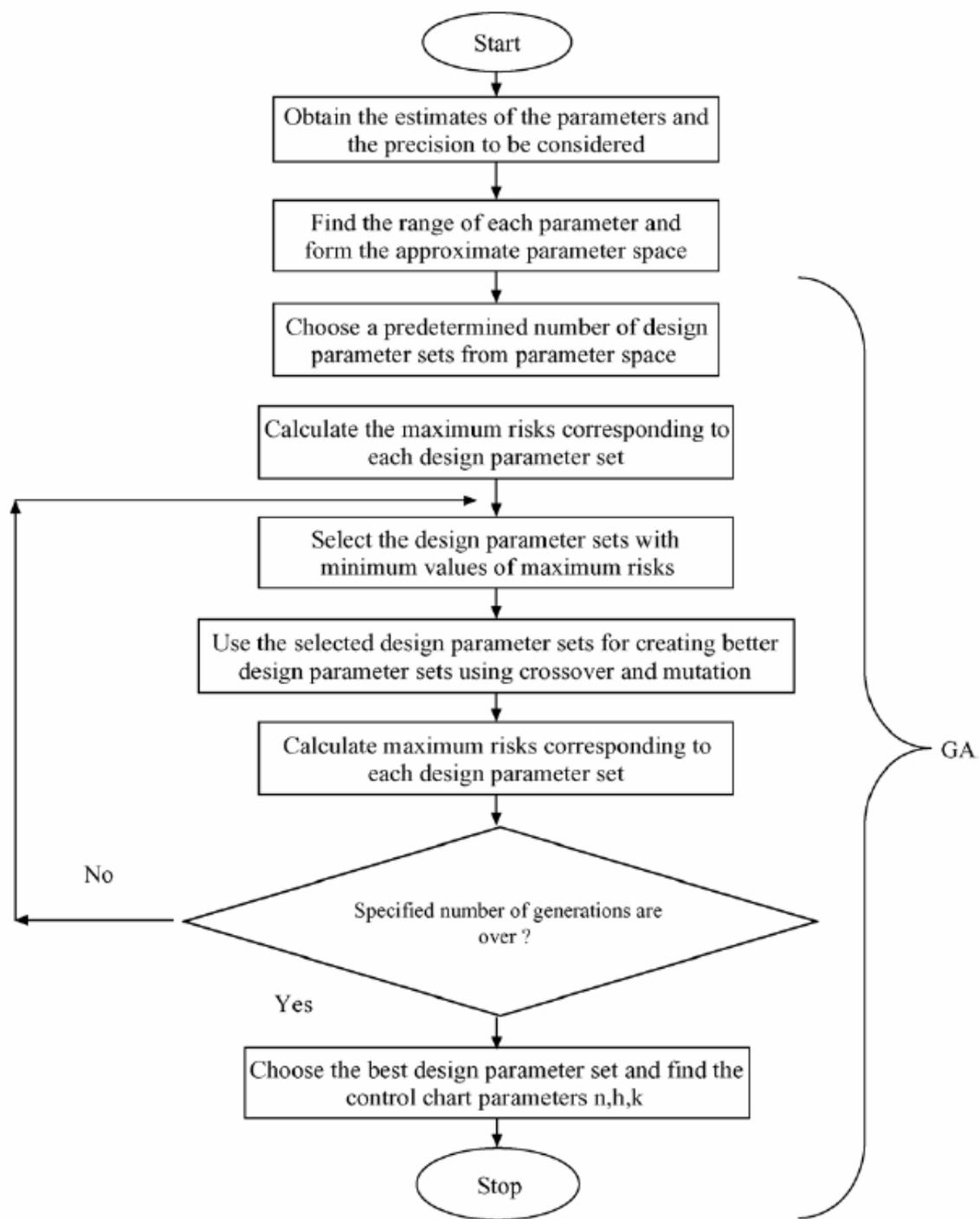
Robust economic design of control chart with multiple parameter variation

■ 尋找最佳設計參數組合流程：

1. 從其設計範圍選擇參數設計組合。
2. 計算參數設計組合的最大風險。
3. 比較以上參數設計組合與新設計參數組合，挑出最小化最大風險者。
4. 重覆執行以上步驟直到找出最小化最大風險的設計參數組合。
5. 在管制圖參數設計時，使用此設計參數組合。

Robust econor chart with mult

- 利用基因演算法尋
小化最大風險之最
計參數組合流程圖



Robust economic design of control chart with multiple parameter variation

- Control chart input parameters: Duncan's example no. 1 [2]

b	0.5
c	0.1
W	25
Y	50
M	100
λ	0.01
δ	2
g	0.05
d	2

Robust economic design of control chart with multiple parameter variation

- Cost and process parameter ranges for different precision scenarios

Parameter	Estimated values	Precision scenario ($\pm 10\%$)		Precision scenario ($\pm 20\%$)		Precision scenario ($\pm 30\%$)		Precision scenario ($\pm 40\%$)		Precision scenario ($\pm 50\%$)	
		Low	High								
b	0.5	0.450	0.055	0.400	0.600	0.350	0.065	0.300	0.700	0.250	0.750
c	0.1	0.090	0.110	0.080	0.120	0.070	0.013	0.060	0.140	0.050	0.150
W	25.0	22.50	27.50	20.00	30.00	17.50	32.50	15.00	35.00	12.50	37.50
Y	50.0	45.00	55.00	40.00	60.00	35.00	65.00	30.00	70.00	25.00	75.00
M	100.0	90.00	110.0	80.00	120.0	70.00	130.0	60.00	140.0	50.00	150.0
λ	0.01	0.009	0.011	0.008	0.012	0.007	0.013	0.006	0.014	0.005	0.015
δ	2.0	1.800	2.200	1.600	2.400	1.400	2.600	1.200	2.800	1.000	3.000
g	0.05	0.045	0.055	0.040	0.060	0.035	0.065	0.030	0.070	0.025	0.075
d	2.0	1.800	2.200	1.600	2.400	1.400	2.600	1.200	2.800	1.000	3.000

Robust economic design of control chart with multiple parameter variation

- GA parameters used with different precision scenarios

Precision scenario (%)	Population size	Cross over probability	Mutation probability	Size of sub string/ chromosome	Selection/ cross over type	Maximum generations
±10	100	0.92	0.0217	5/45	sus/xosp	100
±20	100	0.80	0.0217	5/45	sus/xosp	100
±30	150	0.84	0.0182	6/54	sus/xosp	100
±40	200	0.84	0.0156	7/63	sus/xosp	100
±50	300	0.84	0.0137	8/72	sus/xosp	100

Robust economic design of control chart with multiple parameter variation

- Design parameters at different precision scenarios—risk-based design (RBD)

Precision scenario (%)	b	c	W	Y	M	λ	δ	g	d	Maximum risk (%)
±10	0.5500	0.0993	25.500	53.000	96.667	0.0097	1.9600	0.0463	2.1733	1.5206
±20	0.4645	0.1174	30.000	51.613	81.290	0.0105	1.8065	0.0555	2.4000	6.9237
±30	0.4119	0.1233	21.071	56.429	96.667	0.0077	1.6667	0.0531	1.4762	16.626
±40	0.4165	0.1085	32.008	35.984	71.335	0.0085	1.5579	0.0420	2.7118	33.661
±50	0.3206	0.1288	31.128	56.176	78.235	0.0056	1.2353	0.0734	2.4118	61.961

- True parameters causing maximum risk at different precision scenarios—RBD

Precision scenario (%)	b	c	W	Y	M	λ	δ	g	d	Maximum risk (%)
±10	0.55	0.11	22.5	55.00	90.00	0.009	2.20	0.055	1.80	1.5206
±20	0.60	0.12	20.0	60.00	80.00	0.008	2.40	0.060	1.60	6.9237
±30	0.35	0.13	17.5	65.00	70.00	0.007	2.60	0.065	1.40	16.626
±40	0.30	0.14	15.0	70.0	60.0	0.006	2.80	0.070	1.20	33.661
±50	0.25	0.05	12.5	25.0	150.0	0.015	1.00	0.025	1.00	61.961



Robust economic design of control chart with multiple parameter variation

- True parameters causing maximum risk at different precision scenarios— Average based design

Precision scenario	10%精確度：	M	50%精確度：	Maximum risk (%)
±10	v.S	90.00	v.S	1.822
±20		120.00		8.277
±30		130.00		26.757
±40		140.00		70.248
±50		150.00		171.81
	風險設計之最大風險=1.52%		風險設計之最大風險=61.96%	
	平均設計之最大風險=1.82%		平均設計之最大風險=171.8%	

- Control chart designs under different scenarios

Precision scenario (%)	n	h	k
Average	5	1.3677	3.0819
±10	5	1.4380	3.0544
±20	5	1.4791	2.9344
±30	6	1.6607	2.9512
±40	7	1.8928	2.8512
±50	9	2.4017	2.7618



Statistically constrained designs

- Woodall指出經濟性設計模型的型一誤差機率比一般統計設計模型還來的高，進而造成較多的錯誤警報。
- 經濟統計性設計是以Duncan經濟設計模型為目標式，加入相關的統計限制，如下：

$$\text{Minimize : } L = \frac{b + cn}{h} + \frac{\lambda MB + \alpha Y/h + \lambda W}{1 + \lambda B}$$

Subject to:

- Constraint on the false alarms: $\alpha \leq \alpha_H$;
- Constraint on the power of the chart: $p \geq p_L$;
- Constraint on the average time to signal when out-of-control occurs: $ATS_o \leq ATS_H$.



Statistically constrained designs

- 在風險設計中考慮統計限制下之懲罰成本為：

$$\text{Cost penalty} = L(D_C, \Psi) - L(D_C^*, \Psi)$$

- 風險方程式：

$$\text{Risk} = 100 \times \frac{L(D_C, \Psi) - L(D_C^*, \Psi)}{L(D_C^*, \Psi)} \quad (14)$$

Statistically constrained designs

- Control chart input parameters: Duncan's example no. 1 with statistical constraints

b	0.5
c	0.1
W	25
Y	50
M	100
λ	0.01
δ	2
g	0.05
d	2

Statistically constrained designs

- Design parameters at different precision levels with $\alpha \leq 0.005$, $p \geq 0.95$, $ATS_o \leq 5$

Precision scenario (%)	δ	g	d	Risk (%)
±10	2.1097	0.048	1.826	0.87
±20	2.0645	0.046	1.600	6.38
±30	1.8762	0.046	1.400	14.98
±40	1.7165	0.045	2.800	31.69
±50	1.5098	0.055	1.949	58.57

有統計限制下之最大風險=58.57%

v.s

沒有統計限制下之最大風險=171.81%

- Control chart design under statistical constraints

Precision scenario (%)	n	h	k	Type-I error	Power	ATS_o
±10	5	1.457	3.072	0.0021	0.9501	1.533
±20	5	1.478	2.971	0.0030	0.9501	1.555
±30	6	1.724	2.950	0.0032	0.9501	1.815
±40	7	1.929	2.896	0.0038	0.9501	2.030
±50	9	2.427	2.823	0.0048	0.9560	2.539



Summary

- 穩健經濟性設計方法可以穩定真實成本參數與製程參數的範圍。
- 最小化最大風險已經被使用在管制圖設計當中，並且加入必要的統計限制。
- 基因演算法是一個有效工具用來尋找最佳參數設計組合。
- 精確度20%以下，利用風險設計與平均設計所得最大風險並沒有太大的差異。在高不確定性之下，風險設計較優於平均設計。
- 在成本與製程參數相同下，使用全經濟性設計所得風險高於經濟統計性設計。
- 雖然經濟統計性設計成本高全經濟性設計，但是懲罰成本較少。