



$\bar{X}$ Chart with Adaptive Sample Sizes



作 者：S. S. PRABHU, G. C. RUNGER and J. B. KEATS
出 處：INT. J. PROD. RES., 1993, VOL. 31, NO. 12, 2895-
2909
報 告 者：郭秉裕
指 導 老 師：童超塵 教授



Content_(1/2)

- Introduction
- Design of the adaptive-sample-size $\bar{X}$ control chart
- $ARL(\delta)$ of an adaptive control chart
- Properties of the adaptive-sample size $\bar{X}$ control chart



Content(2/2)

- Fast-initial-response feature
- Comparison with a double-sampling procedure
- Conclusions and future research

Introduction(1/3)

- 執行管制圖量測單位一般以average run length(ARL)表示之，ARL訂為管制圖直到out-of-control偵測時，樣本所被期望採取數目。一般在無隨機性原因存在時，管制圖具有較大之ARL。
- 傳統上，SPC程序為一”open loop”，即使製程平均存在趨勢，我們仍需等待直到管制圖發出out-of-control訊號指示。但”Western Electric Rule”為其特例，當無任一點超過管製界限時，亦需分析其非隨機性存在原因。

Introduction(2/3)

- Reynolds et al.(1988) & Runger and Pignatiello(1991)建立”dual waiting time”，假設其最後樣本平均若接近centreline時，則兩抽樣間隔時間取較小；相反地，若接近control limits時，則取較大。且”dual waiting time”已被證實相對於fixed-sampling-interval(FSI)系統來偵測非隨機原因能有效減少所需時間。
- Flaig(1991)思考在資料趨勢中建立子群數之適應決策，其作法藉由三種不同樣本數大小將central line與control limits內分割成三區間。

Introduction(3/3)

- Nelson(1990)敘述如何由子群變動大小來建立管制圖；Burr(1969)導出當樣本數變動時，利用子群權重去估計標準差。
- Cui and Reynolds(1988)證實經由variable-sampling-interval(VSI)修正之 $\bar{X}$ 管制圖可顯著降低偵測製程平均偏移所需時間。
- Reynolds and Arnold(1989)導出受限於兩抽樣間隔時間變動之最佳單尾Shewhart管制圖數學式。
- Chengalur et al.(1989)思考多參數Shewhart管制圖並結合變動抽樣速率，證實其相較於FSI管制系統有效。

Design of the adaptive-sample-size $\bar{X}$ control chart(1/3)

- 本研究所選定之兩樣本大小 n_1 和 n_2 分別代表各特定目標樣本數，目的是當製程在in control時，使其平均樣本數為 n_0 。
- Centreline：過去觀察值之平均或特定目標值所選定。
Threshold limits：由Centreline加減 w 個樣本標準差。
Control limits：由Centreline加減3個樣本標準差。

Sample size	Control limits	Limits for switching sample sizes
n_1	$\pm 3\sigma_{\bar{X}_1}$	$\pm w\sigma_{\bar{X}_1}$
n_2	$\pm 3\sigma_{\bar{X}_2}$	$\pm w\sigma_{\bar{X}_2}$

Table 1. Control limits and threshold limits for an adaptive sample size control chart.

Design of the adaptive-sample-size $\bar{X}$ control chart(2/3)

數學模式：

假設 r.v $Z_i \sim \text{NID}(0,1)$

$$\text{則 } Z_i = \frac{\bar{X}_i - \mu_0}{\hat{\sigma}/n_j^{1/2}} ; \delta = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma}$$

雙尾管制圖之適應方程

$$n_j = \begin{cases} n_2, & \text{if } w < Z_i < \text{UCL} \\ n_1, & \text{if } -w \leq Z_i \leq w \\ n_2, & \text{if } \text{LCL} < Z_i < -w \end{cases}$$

$$-w\sigma/n_j^{1/2} < \bar{X}_{i-1} < +w\sigma/n_j^{1/2}$$



$$+w\hat{\sigma}/n_j^{1/2} < \bar{X}_{i-1} < \text{UCL} \hat{\sigma}/n_j^{1/2} \text{ or } \text{LCL} \hat{\sigma}/n_j^{1/2} < \bar{X}_{i-1} < -w\hat{\sigma}/n_j^{1/2}$$

Notation：

μ_0 ：目標製程平均

μ_1 ：偏移後之新平均

δ ：製程平均偏移

$\hat{\sigma}$ ：製程平均之估計量

$\bar{X}_i$ ：第ith個子群平均

CL：Centreline

UCL/LCL：Upper/lower control limits

Design of the adaptive-sample-size $\bar{X}$ control chart(3/3)

假定其製程平均落在目標值 μ_0 ($\delta=0$)，且平均樣本數為 n_0 ，則 w 數學式推導如下：

$$E[n_j | LCL < Z_i < UCL; \delta=0] = n_0, \quad j=1, 2$$

$$n_1 < n_0 < n_2$$

$$n_2 \frac{P[LCL < Z_i < -w \cap LCL < Z_i < UCL]}{P[LCL < Z_i < UCL]} + n_1 \frac{P[-w < Z_i < w \cap LCL < Z_i < UCL]}{P[LCL < Z_i < UCL]} + n_2 \frac{P[w < Z_i < UCL \cap LCL < Z_i < UCL]}{P[LCL < Z_i < UCL]} = n_0$$

$$n_2 \frac{\Phi(-w) - \Phi(LCL)}{2[\Phi(UCL) - 0.5]} + n_1 \frac{\Phi(w) - \Phi(-w)}{2[\Phi(UCL) - 0.5]} + n_2 \frac{\Phi(UCL) - \Phi(w)}{2[\Phi(UCL) - 0.5]} = n_0$$

$$w = \Phi^{-1} \frac{2\Phi(UCL)(n_0 - n_2) + (n_1 - n_0)}{2(n_1 - n_2)}$$

ARL(δ) of an adaptive control chart(1/3)

- 定義：當一製程平均偏移 δ 製程標準差單位之 Shewhart 管制圖中，偵測所需之平均連串長度。
(假定製程平均偏移為 μ_0 到 μ_1 ，則偏移量值可 $\delta = (\mu_1 - \mu_0)/\sigma$ 表示之。)
- ARL(δ) 可經由 Markov chain 求算之。
在此定義：
state 1 表示樣本平均落在 threshold limits 之內
state 2 表示樣本平均落在 threshold limits 與 control limits 之間
state 3 表示樣本平均落在 control limits 之外

ARL(δ) of an adaptive control chart(2/3)

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ \textcircled{P_{31}} & \textcircled{P_{32}} & \textcircled{P_{33}} \end{bmatrix}$$

$\underset{=0}{\textcircled{P_{31}}}$ $\underset{=0}{\textcircled{P_{32}}}$ $\underset{=1}{\textcircled{P_{33}}}$

$$P_{j1} = \Pr(-w < Z_i < w | n_j)$$

$$P_{j2} = \Pr(w < Z_i < UCL_j | n_j) + \Pr(LCL_j < Z_i < -w | n_j)$$

$$P_{j3} = \Pr(Z_i > UCL_j | n_j) + \Pr(Z_i < LCL_j | n_j)$$



$$\mathbf{Q}_\delta = \begin{bmatrix} P_{11}^\delta & P_{12}^\delta & P_{13}^\delta \\ P_{21}^\delta & P_{22}^\delta & P_{23}^\delta \\ \text{---} P_{31}^\delta \text{---} & \text{---} P_{32}^\delta \text{---} & \text{---} P_{33}^\delta \text{---} \end{bmatrix}$$

$$P_{11}^\delta = \phi(w - \delta n_1^{1/2}) - \phi(-w - \delta n_1^{1/2})$$

$$P_{12}^\delta = \phi(3 - \delta n_1^{1/2}) - \phi(w - \delta n_1^{1/2}) + \phi(-w - \delta n_1^{1/2}) - \phi(-3 - \delta n_1^{1/2})$$

$$P_{21}^\delta = \phi(w - \delta n_2^{1/2}) - \phi(-w - \delta n_2^{1/2})$$

$$P_{22}^\delta = \phi(3 - \delta n_2^{1/2}) - \phi(w - \delta n_2^{1/2}) + \phi(-w - \delta n_2^{1/2}) - \phi(-3 - \delta n_2^{1/2})$$

ARL(δ) of an adaptive control chart(3/3)

公式： $ARL(\delta) = \mathbf{B}(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_\delta)^{-1} \mathbf{1}$

where $\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ and $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

s.t $b_1 + b_2 = 1 \Rightarrow b_1 n_1 + b_2 n_2 = n_0$

Notation： b_1 與 b_2 分別為管制訊號偵測前，
停留在state1與state2佔總時間比例。

n_1/n_0	n_2/n_0	w	b_1	b_2
0.00	1.5	0.43	0.33	0.67
0.10	1.5	0.46	0.36	0.64
0.20	1.5	0.50	0.38	0.62
0.25	1.5	0.52	0.40	0.60
0.30	1.5	0.55	0.42	0.58
0.40	1.5	0.60	0.45	0.55
0.50	1.5	0.67	0.50	0.50
0.60	1.5	0.76	0.56	0.44
0.70	1.5	0.88	0.63	0.38
0.75	1.5	0.96	0.67	0.33
0.80	1.5	1.06	0.71	0.29
0.00	2.0	0.67	0.50	0.50
0.10	2.0	0.71	0.53	0.47
0.20	2.0	0.76	0.56	0.44
0.25	2.0	0.78	0.57	0.43
0.30	2.0	0.82	0.59	0.41
0.40	2.0	0.88	0.63	0.38
0.50	2.0	0.96	0.67	0.33
0.60	2.0	1.06	0.71	0.29
0.70	2.0	1.19	0.77	0.23
0.75	2.0	1.27	0.80	0.20
0.80	2.0	1.37	0.83	0.17
0.00	5.0	1.27	0.80	0.20
0.10	5.0	1.32	0.82	0.18
0.20	5.0	1.37	0.83	0.17
0.25	5.0	1.40	0.84	0.16
0.30	5.0	1.43	0.85	0.15
0.40	5.0	1.50	0.87	0.13
0.50	5.0	1.58	0.89	0.11
0.60	5.0	1.68	0.91	0.09
0.70	5.0	1.79	0.93	0.07
0.75	5.0	1.87	0.94	0.06
0.80	5.0	1.96	0.95	0.05
0.00	10.0	1.63	0.90	0.10
0.10	10.0	1.68	0.91	0.09
0.20	10.0	1.73	0.92	0.08
0.25	10.0	1.75	0.92	0.08
0.30	10.0	1.78	0.93	0.06
0.40	10.0	1.84	0.94	0.06
0.50	10.0	1.92	0.95	0.05
0.60	10.0	2.00	0.96	0.04
0.70	10.0	2.11	0.97	0.03
0.75	10.0	2.18	0.97	0.03
0.80	10.0	2.25	0.98	0.02

Table 2. Values of the threshold limit w and initial starting probabilities b_1 and b_2 for various combinations of adaptive sample sizes.

Properties of the adaptive-sample size $\bar{X}$ control chart (1/3)

n_1	n_2	w	$\delta = 0$	$\delta = 0.25$	$\delta = 0.50$	$\delta = 0.75$	$\delta = 1.0$	$\delta = 2.0$
Shewhart $\bar{X}$ chart			370.42	184.26	60.70	22.48	9.77	1.47
Adaptive sample size $\bar{X}$ chart								
1	4	0.43	370.42	179.86	52.78	17.16	7.00	1.47
1	5	0.67	370.42	175.93	46.46	13.65	5.49	1.53
1	8	1.06	370.42	166.01	33.85	8.54	3.85	1.73
1	10	1.22	370.42	160.39	28.60	7.15	3.61	1.83
1	12	1.33	370.42	155.27	24.82	6.45	3.61	1.92
1	15	1.46	370.42	148.33	20.92	6.04	3.78	2.02
1	20	1.61	370.42	138.16	17.25	6.15	4.25	2.15
1	25	1.72	370.42	129.37	15.50	6.64	4.76	2.26
2	4	0.67	370.42	180.88	53.97	17.60	7.13	1.44
2	5	0.96	370.42	178.18	48.85	14.41	5.68	1.44
2	8	1.38	370.42	171.91	38.42	9.49	3.97	1.51
2	10	1.52	370.42	168.42	33.72	8.01	3.65	1.55
2	12	1.63	370.42	165.25	30.13	7.18	3.56	1.58
2	15	1.75	370.42	160.84	26.17	6.61	3.62	1.61
2	20	1.89	370.42	154.18	22.06	6.48	3.90	1.65
2	25	1.99	370.42	148.15	19.84	6.78	4.23	1.68

Table 3. Comparison of ARLs for the adaptive and fixed sampling schemes ($n_0 = 3$ and control limits of ± 3).

Properties of the adaptive-sample size $\bar{X}$ control chart (2/3)

n_1	n_2	w	$\delta = 0$	$\delta = 0.25$	$\delta = 0.50$	$\delta = 0.75$	$\delta = 1.0$	$\delta = 2.0$
Shewhart $\bar{X}$ chart			370.42	133.18	33.41	10.76	4.50	1.08
Adaptive sample size $\bar{X}$ chart								
1	8	0.56	370.42	121.26	22.61	6.28	6.28	1.39
1	10	0.76	370.42	114.60	18.30	5.06	2.63	1.52
1	12	0.91	370.42	108.76	15.34	4.42	2.57	1.62
1	15	1.06	370.42	101.10	12.45	4.02	2.65	1.73
1	20	1.25	370.42	90.59	9.88	3.97	2.93	1.86
1	25	1.38	370.42	82.08	8.74	4.23	3.27	1.95
2	8	0.67	370.42	122.52	23.06	6.34	2.90	1.29
2	10	0.88	370.42	116.71	18.37	5.09	2.58	1.36
2	12	1.03	370.42	111.59	15.93	4.41	2.47	1.41
2	15	1.19	370.42	104.87	13.00	3.93	2.45	1.46
2	20	1.38	370.42	95.48	10.29	3.74	2.59	1.51
2	25	1.50	370.42	87.81	9.00	3.85	2.78	1.54
3	8	0.84	370.42	127.09	23.75	6.46	2.92	1.20
3	10	1.06	370.42	119.39	19.82	5.22	2.58	1.23
3	12	1.22	370.42	115.29	17.01	4.52	2.44	1.25
3	15	1.38	370.42	109.88	14.10	3.99	2.38	1.27
3	20	1.55	370.42	102.18	11.30	3.73	2.45	1.29
3	25	1.68	370.42	95.62	9.87	3.77	2.58	1.30
4	8	1.15	370.42	126.40	25.14	7.76	2.98	1.12
4	10	1.38	370.42	123.36	21.87	5.59	2.64	1.13
4	12	1.52	370.42	120.76	19.42	4.91	2.49	1.14
4	15	1.68	370.42	117.33	16.76	4.37	2.42	1.15
4	20	1.85	370.42	112.33	13.97	4.07	2.46	1.15
4	25	1.96	370.42	107.92	12.42	4.09	2.57	1.15

Table 4. Comparison of ARLs for the adaptive and fixed sampling schemes ($n_0 = 5$ and control limits of ± 3).

Properties of the adaptive-sample size $\bar{X}$ control chart (3/3)

$\delta=0.25$				$\delta=0.50$			$\delta=0.75$			$\delta=1.0$			$\delta=2.0$		
n_1	n_2	w	$ARL(\delta)$	n_2	w	$ARL(\delta)$	n_2	w	$ARL(\delta)$	n_2	w	$ARL(\delta)$	n_2	w	$ARL(\delta)$
Shewhart $\bar{X}$ chart ($n_0=3$)															
			184.26			60.70			22.48			9.77			1.47
1	139	2.38	71.03	34	1.87	14.70	17	1.56	6.01	11	1.33	3.59	4	0.67	1.47
2	150	2.60	96.62	37	2.17	18.31	18	1.87	6.45	12	1.68	3.56	4	0.96	1.47
Shewhart $\bar{X}$ chart ($n_0=5$)															
			133.18			33.41			10.76			4.50			1.08
1	133	2.13	38.46	33	1.52	8.25	18	1.18	3.93	12	0.91	2.57	6	0.43	
2	140	2.25	43.01	36	1.69	8.24	20	1.38	3.74	14	1.15	2.44	6	0.52	1.17
3	145	2.39	51.35	38	1.88	8.85	21	1.58	3.72	15	1.38	2.38	6	0.67	1.13
4	155	2.60	70.32	40	2.16	11.09	22	1.89	4.05	16	1.72	2.42	6	0.96	1.15

Table 5. Optimal adaptive-sample-size scheme (Control limits of ± 3).

Fast-initial-response feature(1/2)

- 當管制系統啟動時，選取樣本數大小 n_2 即可視為一fast-intial-response(FIR)系統，且亦可於adaptive-sample-size在開始或重起管制程序時使用之。
- FIR可提防初始啟動問題產生或提早判斷當製序中非隨機原因。

Fast-initial-response feature(2/2)

n_1	n_2	w	$\delta = 0.50$		$\delta = 0.75$	
			$ARL(\delta)$	$ARL_{FIR}(\delta)$	$ARL(\delta)$	$ARL_{FIR}(\delta)$
Shewhart $\bar{X}$ chart						
		33.41	—	10.76	—	
Adaptive sample size $\bar{X}$ chart						
1	8	0.56	22.61	22.01	6.28	5.68
1	10	0.76	18.30	17.31	5.06	4.11
1	12	0.91	15.34	13.97	4.42	3.17
1	15	1.06	12.45	10.52	4.02	2.33
1	20	1.25	9.88	7.07	3.97	1.65
1	25	1.38	8.74	5.09	4.23	1.33
2	8	0.67	23.06	22.43	6.34	5.73
2	10	0.88	18.37	17.83	5.09	4.16
2	12	1.03	15.93	14.51	4.41	3.20
2	15	1.19	13.00	11.02	3.93	2.36
2	20	1.38	10.29	7.46	3.74	1.66
2	25	1.50	9.00	5.39	3.85	1.34
3	8	0.84	23.75	23.08	6.46	5.82
3	10	1.06	19.82	18.72	5.22	4.26
3	12	1.22	17.01	15.49	4.52	3.29
3	15	1.38	14.10	12.00	3.99	2.42
3	20	1.55	11.30	8.29	3.73	1.70
3	25	1.68	9.87	6.05	3.77	1.36
4	8	1.15	25.14	24.41	6.76	6.07
4	10	1.38	21.87	20.65	5.59	4.54
4	12	1.52	19.42	17.72	4.91	3.55
4	15	1.68	16.76	14.33	4.37	2.62
4	20	1.85	13.97	10.42	4.07	1.81
4	25	1.96	12.42	7.83	4.09	1.43

All the three schemes *viz.* Shewhart $\bar{X}$ chart, adaptive scheme and adaptive scheme with FIR feature have an ARL of 370.42 when $\delta=0$ and $n_0=5$.

Table 6. Comparison of ARLs for the adaptive scheme with FIR feature ($n_0=5$ and control limits of ± 3).

Comparison with a double-sampling procedure(1/2)

- **Double-sampling**程序：假如樣本平均落在第一允收限界外而在管制限界內，則第二樣本將被選取，若第二樣本平均落在允收限界內，則製程訂類為in control; 相反低,則為out of control。而control limits位置為一設計參數。
- **Adaptive-sampling**程序：下一樣本數抽取如同fixed-sampling系統即再下一已排程點抽取之。而control limits為。

Comparison with a double-sampling procedure(2/2)

Adaptive-sample-size程序優點：

- a. 僅需加入threshold limits即為standard Shewhart control chart。
- b. 因程序簡化，操作員僅需學習由過去plotted point位置來決定兩樣本數大小之選取。
- c. 由 n_0 ， n_1 和 n_2 所構成之方程式來訂定Threshold limits。
- d. Adaptive-sample-size 程序易應用於其他管制程序圖中，例如：CUSUM以一weighted CUSUM表示。

Conclusions and future research(1/2)

- 有關製程平均偏移變動方面，以ARL為判斷基準下，偵測off-target環境，adaptive sampling管制圖相對於fixed-sampling管制圖數值較小。
- 關於樣本數大小抽取方式，已由Reynolds(1989)證實two adaptive waiting times為最佳組合。
- 在固定 n_0 與 n_1 下，經由computer code編寫下，可獲得最佳之 n_2 值即具有最小之 $ARL(\delta)$ 。

Conclusions and future research(2/2)

- 基於最小總成本管制原則下，未來可朝向將adaptive-sampling frequency 與 adaptive-sampling-size合併為發展方針。
- 最後SPC文獻可看到，在統計監控管制方面逐步轉移於artificial intelligence，尤其在artificial neural network與expert systems。