Joint economic design of EWMA control charts for mean and variance

出處：European Journal of Operational Research 184 (2008) 157–168

作者：Dogan A. Serel, Herbert Moskowitz

報告者：鄭欣卉

指導老師：童超塵教授

Contents

Introduction

- 很多種型態的品質管制圖被發展用來監控製程平均數或變異程度，其中又以Shewhart $\bar{X}$ 管制圖為最常見，但是早在20年前的EWMA管制圖，被認為比起Shewhart $\bar{X}$ 管制圖更適合用來偵測製程平均數的小偏移。
- 有時候單一可歸屬原因會導致製程平均數和變異數同時改變。

Introduction

- 很多學者在探討用EWMA管制圖經濟設計來監控製程平均。
- Park et al. (2004)延續EWMA管制圖傳統經濟設計，抽樣間隔和樣本大小視現行的統計管制圖而定。
- Tolley and English (2001)研究結合EWMA和 $\bar{X}$ 管制圖的經濟設計管制計畫。

Introduction

- 有很多學者提出聯合平均數和變異程度的經濟設計研究，但是用經濟設計EWMA管制圖來同時監控製程平均數和變異程度之研究，倒是還沒被提出。
- 建構在由Lorenzen and Vance (1986) 發展的普通成本函數基礎上，發展一個聯合 EWMA和 μ，σ^2 管制計畫模型，此模型除了考慮經濟設計，也考慮經濟統計性設計。
- 在經濟統計設計中，有兩條統計限制：

  (a) $ARL_0 \geq LB$

  (b) $ARL_1 \leq UB$

EWMA control charts

- 假設觀測值X~N(μ_0 ,σ_0^2)

$$\overline{X_t} = \sum_{i=1}^{n} X_{it}/n \quad \text{and}, \qquad (1)$$

$$S_t^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_{it} - \overline{X_t})^2/(n-1), \qquad (2)$$

- 管制圖統計量

$$Z_t = \lambda_m \overline{X_t} + (1-\lambda_m) Z_{t-1}, \qquad (3)$$

$$Y_t = \max\{\ln(\sigma_0^2), \lambda_v \ln(S_t^2) + (1-\lambda_v) Y_{t-1}\}, \qquad (4)$$

$$0 < \lambda_m,\ \lambda_v \leqslant 1,\ Z_0 = \mu_0,\ Y_0 = \ln(\sigma_0^2)$$

EWMA control charts

- EWMA-m管制上下界

$$\mathrm{LCL}_m = \mu_0 - L_m \sigma_z, \tag{5}$$

$$\mathrm{UCL}_m = \mu_0 + L_m \sigma_z, \tag{6}$$

$\sigma_z = \sigma_0(\lambda_m/(2-\lambda_m)n)^{0.5}$ ， L_m：管制界限係數

- EWMA-v管制上下界

$$\mathrm{LCL}_v = \ln(\sigma_0^2), \tag{7}$$

$$\mathrm{UCL}_v = \ln(\sigma_0^2) + L_v \sigma_y, \tag{8}$$

$\sigma_y^2 = \lambda_v \psi'[(n-1)/2]/(2-\lambda_v)$ ， L_v：管制界限係數

EWMA control charts

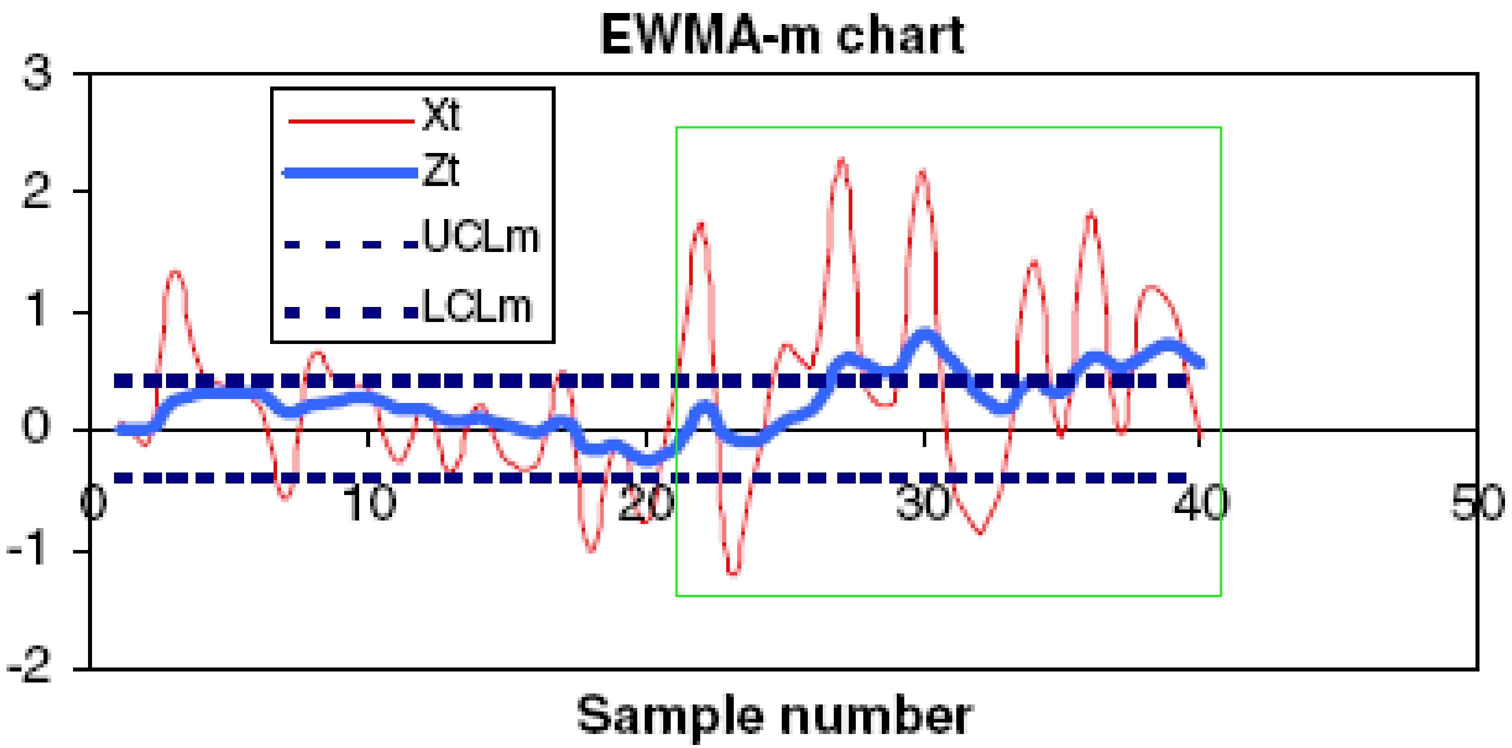
- 為了說明平滑指數權重的影響，模擬40個樣本，點出 $\overline{X}_t$ 和Z_t。前20個樣本是抽自 μ=0，σ^2=1管制內製程，而第21~40個樣本是抽自 μ =0.5，σ^2 =1.5管制外製程。

- EWMA-m：假設n=4, λ_m =0.2
  EWMA-v：點出ln(S_t^2)和Y_t(λ_v =0.2)

- 假設L_m=L_v=2.5

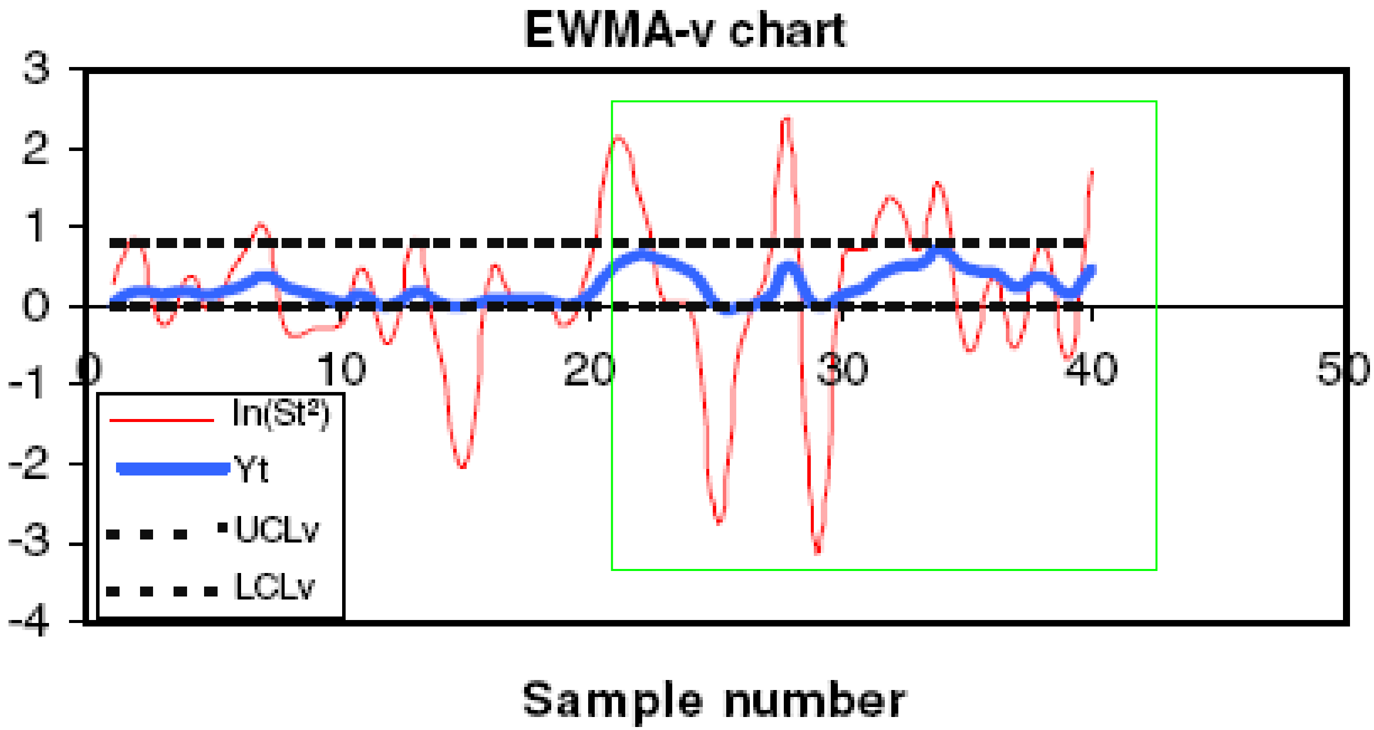
EWMA control charts

- EWMA control chart for mean – Plot of $\overline{X}_t$ and test statistic Z_t when step changes in both mean and variance occur at sample 21.



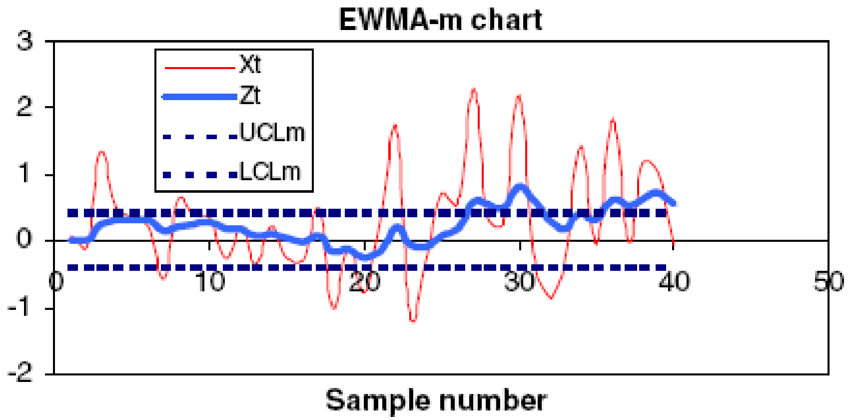
EWMA control charts

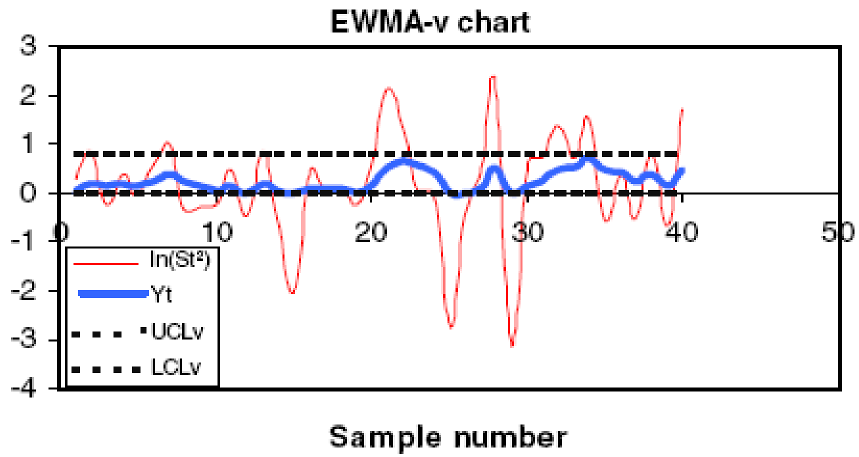
- EWMA control chart for variance – Plot of ln T ln(S_t^2) and test statistic Y_t when step changes in both mean and variance occur at sample 21.



EWMA control charts

- Z_t和Y_t之變異比起$\overline{X_t}$和$\ln(S_t^2)$來的小。





Cost model - Total cost components

- 當製程失控時，X的平均數會變成 $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0$ 且X的標準差會偏移到 σ_1。
- 利用Lorenzen and Vance 架構，考慮EWMA-m和EWMA-v管制圖，發展每小時期望成本：

$$
\begin{aligned}
C = \{&C_0/\theta + C_1(-\tau + nE + h(\mathrm{ARL}_1) + \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2) \\
&+ sF/\mathrm{ARL}_0 + W\}/\{1/\theta + (1-\gamma_1)sT_0/\mathrm{ARL}_0 \\
&- \tau + nE + h(\mathrm{ARL}_1) + T_1 + T_2\} \\
&+ \{[(a+bn)/h][1/\theta - \tau + nE + h(\mathrm{ARL}_1) \\
&+ \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2]\}/\{1/\theta + (1-\gamma_1)sT_0/\mathrm{ARL}_0 - \tau \\
&+ nE + h(\mathrm{ARL}_1) + T_1 + T_2\}. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Cost model - notation

C_0	cost per hour due to nonconformities produced while the process is in control
C_1	cost per hour due to nonconformities produced while the process is out of control
τ	expected time between the occurrence of the assignable cause and the time of the last sample taken before the assignable cause $= [1-(1+\theta h)\exp(-\theta h)]/[\theta(1-\exp(-\theta h)]$
E	time to sample and chart one item
ARL_0	average run length while in control
ARL_1	average run length while out of control
T_1	expected time to discover the assignable cause

Cost model - notation

T_2	expected time to repair the process
γ_1	=1 if production continues during searches, 0 if production ceases during searches
γ_2	=1 if production continues during repair, 0 if production ceases during repair
s	expected number of samples taken while in control $= \exp(-\theta h)/[1-\exp(-\theta h)]$
F	cost per false alarm
W	cost to locate and repair the assignable cause
T_0	expected search time when the signal is a false alarm
a	fixed cost per sample
b	cost per unit sampled

Cost model

- 管制內和管制外期望長度：

$$E(I_{\text{in}}) = 1/\theta + (1-\gamma_1)sT_0/\text{ARL}_0, \tag{10}$$

$$E(I_{\text{out}}) = -\tau + nE + h(\text{ARL}_1) + T_1 + T_2. \tag{11}$$

- 管制內期間：發生可歸屬原因前的平均時間、調查假警報的平均時間。

  管制外期間：可歸屬原因發生後，搜尋可歸屬原因並且修復製程的時間。

Cost model

- 當ARL_0越大、ARL_1越小，能夠達到最小化錯誤警報、快速反應失控訊息。
- ARL_0和ARL_1視n,L_m,L_v, λ_m, λ_v而定的。

Cost model - Quadratic loss function

- 田口提出二次損失函數的觀念，認為只要產品品質特性偏離目標值即會產生損失，而偏離目標值越遠，則造成的損失越大。
- 在品質特徵X的機率函數為f(x)，在管制下的產品每單位期望品質成本：

$$\begin{aligned} J_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} K(x-T)^2 f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\mu_0+\mu_0-T)^2 f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\mu_0)^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{\infty} K(\mu_0-T)^2 f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= K[\sigma_0^2+(\mu_0-T)^2]. \qquad (12) \end{aligned}$$

Cost model - Quadratic loss function

- 管制外的產品每單位期望品質成本：

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\mu_1+\mu_1-T)^2 f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\mu_1)^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{\infty} K(\mu_0+\delta\sigma_0-T)^2 f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= K[\sigma_1^2+(\mu_0+\delta\sigma_0-T)^2] \\
&= K[\rho^2\sigma_0^2+(\mu_0-T)^2+\delta^2\sigma_0^2-2\delta\sigma_0(\mu_0-T)].
\end{aligned} \tag{13}
$$

$$\rho = \sigma_1/\sigma_0$$

- 田口損失係數：$K = A/(x-T)^2,$ (14)

Cost model - Quadratic loss function

- 為了在經濟設計中加入二次損失，將$C_0=J_0p$，$C_1=J_1p$帶入方程式(9)中。
- 利用最小化總單位成本C來找到最佳管制圖參數值。
- 品質特徵的平均數和變異數會以二次損失方式直接影響模型的總成本。

Computational optimization procedure

- 利用馬可夫鏈來求得管制下和管制外的ARL：
  1. 為了找出最佳解，首先固定樣本數n ，最佳化其他五個決策變數。
  2. 帶入n=1~20，重覆以上步驟。
  3. 最後決定出達到最小化總成本的最佳n值和其他相對應決策變數值。

Computational optimization procedure

- 用Nelder–Mead downhill simplex method來尋找n和其他參數組合的最佳經濟設計 ，用同樣的演算法做微小的修改，用來求經濟統計性設計的解。
- 如果沒有滿足ARL限制時會產生懲罰成本。
- 其目標是在兩條統計限制 $ARL_0 \geqslant LB$, and $ARL_1 \leqslant UB$ 最小化總成本。
- 本研究限制 $h \leqslant 20,\ \lambda_m,\ \ \lambda_v \leqslant 0.99,\ L_m,\ L_v \leqslant 4$ 搜尋空間下。

Numerical examples

- 假設尋找可歸屬原因製程仍然繼續運作，但修復製程時停止運作($\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0$) 。
- 使用以下參數值：

$$\theta \in \{0.01, 0.05\},\ F = 500,\ W = 250,\ a = 5,\ b = 1,\ E = 0.5,\ T_0 = 0,$$

$$T_1 = 20,\ T_2 = 0,\ p = 200 \text{ per hour},\ \sigma_0^2 = 1,\ \mu_0 = T = 0.$$

$$\rho = \sigma_1/\sigma_0$$

Numerical examples

Table 1 Optimal economic designs (K = 0.1)

θ	δ	ρ	C	h	n	λ_m	λ_v	L_m	L_v
0.01	0.5	1	24.51	20.00	7	0.29	0.11	2.45	2.67
		1.5	32.26	10.65	11	0.80	0.77	2.80	1.83
		2	39.10	6.14	6	0.99	0.86	3.13	1.69
	1	1	28.54	15.63	10	0.83	0.15	2.53	3.12
		1.5	34.98	8.10	7	0.76	0.99	2.67	1.88
		2	41.92	5.19	5	0.81	0.84	3.09	1.69
	1.5	1	33.64	9.40	6	0.88	0.05	2.73	2.80
		1.5	39.43	5.53	5	0.85	0.81	2.75	2.04
								3.02	1.63
	2							2.96	2.27
								3.00	3.98
								2.94	1.53
0.05	0.5	1	25.36	20.00	2	0.68	0.11	3.90	1.38
		1.5	45.60	15.57	9	0.85	0.98	2.28	1.37
		2	65.77	4.87	5	0.94	0.74	2.90	1.52
	1	1	38.38	19.98	8	0.73	0.09	2.20	3.88
		1.5	54.33	7.64	6	0.80	0.94	2.34	1.65
		2	73.92	3.89	4	0.83	0.92	2.74	1.44
	1.5	1	53.15	7.41	5	0.82	0.86	2.44	3.19
		1.5	67.90	4.26	4	0.87	0.93	2.56	1.80
		2	87.20	3.03	3	0.93	0.88	2.77	1.41
	2	1	72.10	4.51	3	0.86	0.96	2.65	2.24
		1.5	86.35	3.37	3	0.78	0.66	2.63	1.78
		2	105.52	2.63	3	0.77	0.99	2.86	1.45

當製程平均數和變異數偏移越大，
單位損失成本越大。

Numerical examples

Table 2 Optimal statistically constrained economic designs ($ARL_0 \geqq 250$, $ARL_1 \leqq 20$, K = 0.1)

θ	δ	ρ	C	h	n	λ_m	λ_v	L_m	L_v
0.01	0.5	1	24.89	12.20	6	0.35	0.35	3.25	2.15
		1.5	32.63	6.80	9	0.63	0.59	3.35	2.10
		2	39.47	6.49	8	0.50	0.72	3.35	2.10
	1	1	29.12	5.45	4	0.34	0.20	2.90	2.00
		1.5	35.37	4.20	5	0.50	0.20	3.00	1.90
		2	42.46	5.45	7	0.49	0.68	3.38	2.14
	1.5	1	34.10	4.45	4	0.50	0.15	3.00	1.90
		1.5	39.63	3.95	4	0.60	0.15	3.00	1.90
		2	46.94	3.20	4	0.55	0.35	3.00	1.90
	2	1	40.46	3.95	3	0.62	0.20	2.90	2.00
		1.5	45.75	3.70	3	0.67	0.20	2.90	2.00
		2	52.98	3.20	3	0.76	0.20	2.90	2.00
0.05	0.5	1	26.84	12.20	6	0.35	0.35	3.25	2.15
		1.5	46.28	8.20	9	0.61	0.56	3.35	2.10
		2	66.45	3.70	4	0.55	0.69	3.40	1.70
	1	1	38.88	11.45	5	0.39	0.35	3.25	2.15
		1.5	54.91	3.70	5	0.63	0.55	2.90	2.30
		2	74.50	3.70	4	0.55	0.75	3.40	1.70
	1.5	1	53.66	4.36	3	0.55	0.55	2.90	2.11
		1.5	68.15	3.70	5	0.75	0.55	2.90	2.30
		2	87.55	2.70	4	0.85	0.85	3.00	1.90
	2	1	72.43	3.70	3	0.55	0.65	2.90	2.60
		1.5	86.51	2.70	3	0.85	0.85	3.00	1.90
		2	105.83	2.51	3	0.85	0.85	3.00	1.90

Numerical examples

Table 3 Optimal statistically constrained economic designs ($ARL_0 \geqq 100$, $ARL_1 \leqq 10$, K = 0.1)

θ	δ	ρ	C	h	n	λ_m	λ_v	L_m	L_v
0.01	0.5	1	24.59	18.20	7	0.35	0.35	2.75	2.15
		1.5	32.41	9.00	11	0.72	0.64	2.85	2.10
		2	39.41	6.60	8	0.63	0.75	3.01	2.10
	1	1	28.68	13.00	10	0.65	0.50	2.85	2.31
		1.5	35.02	6.60	7	0.70	0.75	2.85	2.10
		2	42.28	6.60	7	0.69	0.75	2.87	2.10
	1.5	1	33.66	8.20	6	0.78	0.50	2.85	2.44
		1.5	39.49	6.20	5	0.78	0.52	2.75	2.15
		2	46.89	3.45	4	0.65	0.39	2.92	2.10
	2	1	40.22	6.20	4	0.89	0.35	2.84	2.15
		1.5	45.75	3.70	3	0.67	0.20	2.90	2.00
		2	52.97	3.20	3	0.72	0.35	2.92	2.10
0.05	0.5	1	26.18	19.40	5	0.50	0.50	2.85	2.10
		1.5	46.04	9.80	10	0.72	0.61	2.85	2.10
		2	65.95	3.92	5	0.75	0.66	2.90	1.70
	1	1	38.58	13.70	7	0.57	0.35	2.75	2.15
		1.5	54.56	6.20	7	0.69	0.61	2.75	2.15
		2	74.06	3.83	5	0.70	0.75	2.90	1.70
	1.5	1	53.21	6.95	5	0.80	0.35	2.75	2.38
		1.5	68.00	3.76	4	0.72	0.75	2.90	1.70
		2	87.35	3.70	4	0.75	0.75	2.90	1.70
	2	1	72.21	3.76	3	0.83	0.55	2.90	2.00
		1.5	86.49	3.70	3	0.80	0.70	2.90	1.70
		2	105.77	2.33	3	0.70	0.55	2.90	1.70

Numerical examples

- 經濟設計

δ	ρ	C	h
0.5	1	24.51	20.00
	1.5	32.26	10.65

- 經濟統計設計

δ	ρ	C	h
0.5	1	24.89	12.20
	1.5	32.63	6.80

- 當平均數和變異數小偏移時($\delta, \rho \leqslant 1.5$)，經濟統計設計比起經濟設計有比較小的h。

Numerical examples

- 經濟設計

δ	ρ	C
0.5	1	24.51
	1.5	32.26
	2	39.10
1	1	28.54
	1.5	34.98
	2	41.92

- 經濟統計設計

δ	ρ	C
0.5	1	24.89
	1.5	32.63
	2	39.47
1	1	29.12
	1.5	35.37
	2	42.46

- 經濟統計設計比起經濟設計有比較高的C。

Numerical examples

- 圖二、圖三決策變數值是滿穩定的，是受下面兩個因素影響：

  (1)經濟統計設計的可行區比經濟設計小。

  (2)搜尋時的決策變數初始值影響演算法的結果。

- 雖然結果並不是全部最佳解，但是在實驗中發現在不同變數水準下只有最佳成本值有些微的的不同。利用 Nelder–Mead downhill simplex method 和 exhaustive grid search approach得到的最佳解並沒有顯著的不同。

Numerical examples

- 本研究調查田口損失係數K對經濟設計參數的影響。

Table 4 Optimal economic designs (K = 0.4)

θ	δ	ρ	C	h	n	λ_m	λ_v	L_m	L_v
0.01	0.5	1	90.42	18.81	18	0.60	0.05	2.06	3.78
		1.5	114.79	3.10	6	0.71	0.56	2.93	1.68
		2	140.22	2.19	4	0.99	0.72	3.04	1.56
	1	1	103.40	6.22	8	0.73	0.24	2.56	3.86
		1.5	125.04	2.68	5	0.71	0.78	2.70	1.82
		2	150.89	1.64	3	0.69	0.79	3.09	1.41
	1.5	1	122.05	3.10	4	0.73	0.15	2.75	2.49
		1.5	142.33	1.74	3	0.65	0.99	2.78	1.66
		2	168.43	1.51	3	0.84	0.82	3.13	1.43
	2	1	147.02	2.34	3	0.84	0.29	2.81	2.38
		1.5	166.70	1.41	2	0.72	0.37	2.96	1.58
		2	192.53	1.30	2	0.77	0.83	3.09	1.12
0.05	0.5	1	99.13	20.00	7	0.52	0.81	1.54	3.35
		1.5	160.94	3.53	6	0.92	0.89	2.49	1.36
		2	235.15	1.54	3	0.96	0.87	2.81	1.19
	1	1	135.41	5.09	6	0.79	0.92	2.19	2.88
		1.5	192.32	2.13	4	0.73	0.99	2.41	1.57
		2	266.46	1.34	3	0.72	0.73	2.71	1.32
	1.5	1	189.06	2.93	4	0.78	0.15	2.57	2.21
		1.5	244.02	1.56	3	0.67	0.05	2.57	1.52
		2	318.05	1.15	2	0.52	0.76	2.73	0.94
	2	1	261.90	1.70	2	0.79	0.89	2.50	2.22
		1.5	315.75	1.27	2	0.61	0.56	2.57	1.44
		2	389.92	0.95	2	0.61	0.42	2.75	1.14

Numerical examples

Table 5 Optimal economic designs (K = 0.7)

θ	δ	ρ	C	h	n	λ_m	λ_v	L_m	L_v
0.01	0.5	1	155.39	9.79	12	0.47	0.32	2.10	2.71
		1.5	195.06	1.90	5	0.65	0.62	2.83	1.62
		2	239.03	1.42	3	0.99	0.89	2.88	1.33
	1	1	176.90	3.83	6	0.62	0.05	2.52	2.61
		1.5	212.94	1.57	4	0.63	0.68	2.81	1.67
		2	257.38	1.27	3	0.89	0.80	2.91	1.38
	1.5	1	208.89	2.42	4	0.78	0.05	2.71	3.02
		1.5	243.05	1.46	3	0.75	0.57	2.79	1.82
		2	287.57	1.01	2	0.86	0.82	2.90	1.10
	2	1	252.27	1.98	3	0.84	0.16	2.75	2.29
		1.5	285.22	1.04	2	0.67	0.55	2.96	2.13
		2	329.97	1.03	2	0.92	0.72	2.87	1.08
0.05	0.5	1	169.96	19.74	12	0.60	0.05	1.36	2.34
		1.5	273.02	2.24	5	0.80	0.80	2.39	1.42
		2	401.12	0.96	2	0.91	0.75	2.66	0.94
	1	1	230.26	3.20	5	0.55	0.55	2.30	3.10
		1.5	327.20	1.16	3	0.49	0.54	2.61	1.42
		2	455.16	0.82	2	0.95	0.64	2.75	0.93
	1.5	1	322.85	2.11	4	0.78	0.05	2.53	2.15
		1.5	416.80	0.88	2	0.58	0.75	2.56	1.85
		2	544.71	0.89	2	0.74	0.71	2.82	0.97
	2	1	449.21	1.03	2	0.81	0.55	2.51	2.57
		1.5	542.09	0.95	2	0.81	0.81	2.52	2.01
		2	670.77	0.81	2	0.66	0.70	2.58	1.25

Numerical examples

- K=0.1

θ	δ	ρ	C	h
0.01	0.5	1	24.51	20.00
		1.5	32.26	10.65
		2	39.10	6.14

- K=0.4

θ	δ	ρ	C	h
0.01	0.5	1	90.42	18.81
		1.5	114.79	3.10
		2	140.22	2.19

- K=0.7

θ	δ	ρ	C	h
0.01	0.5	1	155.39	9.79
		1.5	195.06	1.90
		2	239.03	1.42

- 由上可知，K增加h減少。因此不良品很高時，會導致抽樣次數變得更頻繁。

Numerical examples

- 由圖1~5可知：

  (1)偏移量增加，h和n下降。

  (2) θ增加，單位時間總成本C增加，h下降。

  θ減少的話，製程在管制內時間增加，所以C減少。

Conclusion

- 聯合經濟設計EWMA管制圖來監控製程平均數和變異數。利用馬可夫鏈計算管制計畫的ARL。以田口提出二次損失函數的觀念，認為只要產品品質特性偏離目標值即會產生損失。
- 當使用者希望能達到統計績效時，經濟統計設計會比經濟設計好。
- 未來研究可以考慮聯合其他管制圖經濟設計來監控製程平均數和變異數，例如聯合CUSUM經濟設計。