



Two-Stage Short-Run ($\bar{x}$, s) Control Charts



出處：Quality Engineering, 17:95–107, 2005

作者：Matthew E. Elam^{1,*} and Kenneth E. Case²

報告者：鄭欣卉

指導老師：童超塵教授



Contents

- Introduction
- The distribution of the standard deviation
- The distribution of the studentized standard deviation
- The distribution of the mean standard deviation
- Derivation of the control chart factor equations
- Advantages of two-stage short-run ($\bar{x}, s$) control charts
- Conclusions

Introduction

- Hillier(1969)描述短製程管制圖因為產出太小無法使用正規管制圖。短製程是指在管制圖上，因為很少或甚至沒有製程資訊來估計製程參數。
- Hillier(1969)提出在期望的假警報率和高機率偵測特殊原因下，使用二階程序來決定短製程管制界線。他提出 $(\bar{X}, R)$ 二階短製程理論，並且給予 $n=5$ 一階和二階短製程 $(\bar{X}, R)$ 管制圖因子的結果。
 - 第一階段：從製程中抽出樣本數為 n 的 m 個樣本組並且決定管制界線以判斷是否在管制內。
 - 第二階段：如果製程在管制內，用初始管制界線對未來的製程進行監控。

Introduction

- Pyzdek (1993) and Yang (1995, 1999, 2000) 試圖擴展 Hillier(1969) 二階短製程 ($\bar{X}, R$) 管制圖的結果，但是他們的結果都包含錯誤值。
- Elam and Case (2001) 發展和執行一個電腦程式，使 Hillier(1969)、Pyzdek (1993) and Yang (1995, 1999, 2000) 的二階短製程 ($\bar{X}, R$) 管制圖因子成就結合。

Introduction

- Hillier(1969)第二個應用：二階短製程($\bar{x}, v$)和($\bar{x}, \sqrt{v}$)管制圖。
- Yang and Hillier (1970)依Hillier(1969)的理論導出計算二階短製程($\bar{x}, v$)和($\bar{x}, \sqrt{v}$)管制圖管制界線因子的方程式。
- Elam and Case (2003a, b)提出關於Yang and Hillier (1970)研究結果的問題。

Introduction

- **Problem** : Hillier (1969) and Yang and Hillier (1970) 只有試圖基於Hillier(1969)的理論去發展二階短製程管制圖。Yang and Hillier (1970) 沒有提到導出計算二階短製程($\bar{x}, s$)管制圖管制界線因子的方程式。
- **Solution** : 本研究發展一個應用在Hillier(1969)二階短製程的($\bar{x}, s$)管制圖的理論。用此理論導出計算二階短製程($\bar{x}, s$)管制圖管制界線因子的方程式。

The distribution of the standard deviation

- 根據Lord (1950)提出的抽自 $N(\mu, \sigma^2)$ 樣本數為 n 的樣本組標準差分配為：

$$p(s) = \frac{v_1^{v_1/2}}{2^{v_1/2-1} \cdot \Gamma(v_1/2) \cdot \sigma^{v_1}} \cdot s^{v_1-1} \cdot e^{-v_1 \cdot s^2 / (2 \cdot \sigma^2)}$$

[1a]

s ：在自由度為 $v_1 = n - 1$ 下對 σ 的估計值。

The distribution of the standard deviation

■ 也可寫為：

$$p(s) = \left(\frac{1}{\sigma^{v1}} \right) \times \left[e^{\left\{ \begin{aligned} & (v1/2) \cdot \ln(v1) - (v1/2 - 1) \\ & \times \ln(2) - \text{gammln}(v1/2) + (v1 - 1) \cdot \ln(s) - (v1 \cdot s^2) / (2 \cdot \sigma^2) \end{aligned} \right\}} \right] \quad [1b]$$

gammln：gamma 分配取自然對數。

The distribution of the standard deviation

- 自由度為 v_1 標準差 s 的分配：

$$p(s) = c \left(\frac{v_1 \cdot s^2}{\sigma^2} \right) \cdot \frac{2 \cdot v_1 \cdot s}{\sigma^2} \quad [2]$$

$$C \sim \chi^2(v_1)$$

- 自由度為 v_1 標準差 s 的累積機率函數(cdf)：

$$P(S) = \int_0^s p(s) ds \quad [3]$$

The distribution of the standard deviation

- 根據Mead (1966)提出的自由度為 v_1 標準差 s 分配的平均為：

$$E(s) = \sigma \cdot \left(\frac{2}{v_1}\right)^{0.5} \cdot \frac{\Gamma((v_1 + 1)/2)}{\Gamma(v_1/2)} \quad [4a]$$

- 當 $\sigma=1$ 時，也可寫為：

$$c4 = \sigma \cdot \left(\frac{2}{v_1}\right)^{0.5} \cdot (e^{\text{gammln}((v_1+1)/2) - \text{gammln}(v_1/2)}) \quad [4b]$$

The distribution of the standard deviation

- 根據Mead (1966)提出的自由度為 v_1 標準差 s 分配的變異數為：

$$\text{var}(s) = \left(\frac{2 \cdot \sigma^2}{v_1} \right) \cdot \left[\frac{\Gamma((v_1 + 2)/2)}{\Gamma(v_1/2)} - \left(\frac{\Gamma((v_1 + 1)/2)}{\Gamma(v_1/2)} \right)^2 \right] \quad [5a]$$

- $\sqrt{\text{var}(s)}$ 為管制圖常數，標記為 $c_5(\sigma=1)$ ，也等於 $\sqrt{1 - C_4^2}(\sigma=1)$ ，寫為：

$$c_5 = \sigma \cdot \left[\left(\frac{2}{v_1} \right) \cdot \left[e^{\text{gammln}((v_1 + 2)/2) - \text{gammln}(v_1/2)} - e^{2 \cdot (\text{gammln}((v_1 + 1)/2) - \text{gammln}(v_1/2))} \right] \right]^{0.5} \quad [5b]$$



The distribution of the studentized standard deviation

- 根據Irwin (1931)提出的抽自 $N(\mu, \sigma^2)$ 樣本數為 n 的樣本組學生標準差分配為：

$$p^3(t) = \frac{2 \cdot v_1^{v_1/2} \cdot v_2^{v_2/2} \cdot \Gamma((v_1 + v_2)/2) \cdot t^{v_1-1}}{\Gamma(v_1/2) \cdot \Gamma(v_2/2) \cdot (v_1 \cdot t^2 + v_2)^{(v_1+v_2)/2}}$$

[6a]

$$t = s/s'$$

s' ：在自由度為 v_2 下第二次估計 σ 的值。

The distribution of the studentized standard deviation

■ 也可被寫為：

$$p3(t) = e^{p1(t)-p2(t)} \quad [6b]$$

where

$$\begin{aligned} p1(t) = & \ln(2) + \left(\frac{v1}{2}\right) \cdot \ln(v1) + \left(\frac{v2}{2}\right) \cdot \ln(v2) \\ & + \text{gammln}\left(\frac{v1 + v2}{2}\right) + (v1 - 1) \cdot \ln(t) \end{aligned} \quad [6c]$$

$$\begin{aligned} p2(t) = & \text{gammln}\left(\frac{v1}{2}\right) + \text{gammln}\left(\frac{v2}{2}\right) + \left(\frac{v1 + v2}{2}\right) \\ & \times \ln(v1 \cdot t^2 + v2) \end{aligned} \quad [6d]$$

The distribution of the studentized standard deviation

- 在 S 的自由度為 v_1 、 S' 的自由度為 v_2 下的學生標準差分配 $t = s/s'$ 等於一個二次分配如下：

$$p_3(t) = f(t^2) \cdot 2 \cdot t \quad [7]$$

f ：在分子自由度為 v_1 、分母自由度為 v_2 下的 F 分配

The distribution of the studentized standard deviation

- 在 S 的自由度為 v_1 、 S' 的自由度為 v_2 下學生標準差分配 $t=S/S'$ 的累積機率函數為：

$$P3(T) = \int_0^T p3(t) dt \quad [8]$$

- 當在任何 n 下 $v_2 \rightarrow \infty$ ，學生標準差分配收斂於標準差 S 分配 ($\sigma = 1$)。

The distribution of the mean standard deviation

- Patnaik (1950)研究當統計量是一個範圍的情況下，並且發展一個近似平均範圍 $\bar{R}/\sigma$ 分配為 $(x \cdot d_2^*)/\sqrt{v}$ ，是一個自由度為 v 的 x 分配函數。
- Hillier (1964,1967) 使用 Patnaik's (1950) 的理論分別導出計算 $\bar{x}$ 和 R 短製程管制圖因子。
- Hillier (1969) 包含二階程序進入短製程 ($\bar{x}$, R) 管制圖因子的計算。

The distribution of the mean standard deviation

- 在統計量為標準差時，且此分配的重要性是在平均標準差 $\bar{s}/\sigma$ 的分配。為了可以使用 Hillier (1969) 的理論去導出計算二階短製程 $(\bar{X}, s)$ 管制圖管制界線因子的方程式，本研究應用 Patnaik's (1950) 理論，藉由自由度為 v_2 的 $(x \cdot C_4^*)/\sqrt{v_2}$ 分配來近似平均標準差 $\bar{s}/\sigma$ 的分配。
- $c4star \equiv C_4^*$ ，其方程式如下：

$$c4star = \left(c4^2 + \frac{c5^2}{m} \right)^{0.5} \quad [9]$$



The distribution of the mean standard deviation

- C_4^* 有一些特性，當 $m=1$ 時， $C_4^*=1$ ，
當 $m \rightarrow \infty$ ， C_4^* 收斂於 C_4 。
- 使用 Prescott (1971) 的研究結果，導出定義 v_2 的方程式，等同於自由度為 v_2 的 χ^2 分配平均數平方的變異數和平均數標準差 $\bar{s}/\sigma$ 分配的比率，其方程式如下：

$$d(x) = h(x) - r \quad [10a]$$

The distribution of the mean standard deviation

- Elam and Case (2001) 導出 $h(x)$ ，是在 x 自由度下 x 分配變異數和平均平方的比率，如下：

$$h(x) = \frac{x \cdot e^{2 \cdot [\text{gammln}(0.5 \cdot x) - \text{gammln}(0.5 \cdot x + 0.5)]} - 2}{2} \quad [10b]$$

- r 是平均數標準差 $\bar{s}/\sigma$ 分配的變異數和平均平方的比率，方程式如下：

$$r = \frac{c5^2}{m \cdot c4^2} \quad [10c]$$

Derivation of the control chart factor equations

- A32，二階短製程 $\bar{x}$ 管制圖因子，其推導幾乎跟 Hillier (1969) A_2^* 相同，不同在於 A32， $\bar{s}$ ， v_2 和 C_4^* 分別取代 A_2^* ， $\bar{R}$ ， v 和 c 。A32 方程式如下：

$$A32 = \left(\frac{\text{crit_t}}{c4\text{star}} \right) \cdot \left(\frac{m+1}{n \cdot m} \right)^{0.5} \quad [11]$$

crit_t：在自由度為 v_2 學生 t 曲面 $1-(\alpha\text{Mean}/2)$ 累積區域的關鍵值。

alphaMean： $\bar{x}$ 管制圖的假警報機率。

Derivation of the control chart factor equations

- A31，一階短製程 $\bar{x}$ 管制圖因子，其推導幾乎跟 Hillier (1969) A_2^{**} 相同，不同在於 A31， $\bar{s}$ ， v_2 和 C_4^* 分別取代 A_2^{**} ， $\bar{R}$ ， v 和 c 。A31 方程式如下：

$$A31 = \left(\frac{\text{crit}_t}{c4star} \right) \cdot \left(\frac{m-1}{n \cdot m} \right)^{0.5} \quad [12]$$

Derivation of the control chart factor equations

- B42，二階短製程s上管制圖因子，其除了記號與分配不同以外，是依據Hillier (1969) D_4^* 推導出來的。B42方程式如下：

$$B42 = \frac{tB4}{c4star} \quad [13]$$

tB4：在s的自由度為 v_1 、s'的自由度為 v_2 下學生標準差 $t=s/s'$ 分配的1-alphaStandUCL百分點。

alphaStandUCL：s管制圖上管制界線發生假警報的機率。

Derivation of the control chart factor equations

- B32，二階短製程s下管制圖因子，其推導幾乎與B42相同，不同在於B32，tB3和alphaStandLCL分別取代B42，tB4和alphaStandUCL。B32方程式如下：

$$B32 = \frac{tB3}{c4star} \quad [14]$$

tB3：在s的自由度為 v_1 、s'的自由度為 v_2 下學生標準差 $t=s/s'$ 分配的 $1-\alpha$ StandLCL百分點。

Derivation of the control chart factor equations

- B41，一階短製程s上管制圖因子，其推導幾乎跟 Hillier (1969) D_4^{**} 相同，不同在於B41， S_i ， $B42$ 和 $\bar{S}$ 分別取代 D_4^{**} ， R_i ， D_4^* 和 $\bar{R}$ 。B41方程式如下：

$$B41 = \frac{m \cdot tB4prevm}{c4starprevm \cdot (m - 1) + tB4prevm} \quad [15]$$

tB4prevm：在s的自由度為 v_1 、s'的自由度為 $v2prevm$ 下學生準差 $t=s/s'$ 分配的 $1 - \alpha$ StandUCL百分點。

$v2prevm$ ：除了是 $m-1$ 個樣本組以外，與 v_2 意思相同。

C4starprevm：除了是 $m-1$ 個樣本組以外，方程式與c4star相同。

Derivation of the control chart factor equations

- B31，一階短製程s下管制圖因子，其推導幾乎跟Hillier (1969) D_3^{**} 相同，不同在於B31， S_i ，B32和 $\bar{S}$ 分別取代 D_3^{**} ， R_i ， D_3^* 和 $\bar{R}$ 。B31方程式如下：

$$B31 = \frac{m \cdot tB3prevm}{c4starprevm \cdot (m - 1) + tB3prevm} \quad [16]$$

tB3prevm：在s的自由度為 v_1 、s'的自由度為 $v2prevm$ 下學生準差 $t=s/s'$ 分配的1- α StandLCL百分點。

Derivation of the control chart factor equations

- A3，正規 $\bar{x}$ 管制圖常數，或許可以由當 $m \rightarrow \infty$ 時，A31或A32界線得到。方程式如下：

$$A3 = \frac{\text{crit_z}}{c4 \cdot n^{0.5}} \quad [17]$$

crit_z：在標準常態曲面 $1-(\alpha\text{Mean}/2)$ 累積區域的關鍵值。

Derivation of the control chart factor equations

- B4，基於 α 的正規s上管制圖常數，或許可以由當 $m \rightarrow \infty$ 時，B41或B42界線得到。方程式如下：

$$B4 = \frac{sB4}{c4} \quad (18)$$

sB4：在自由度為 v_1 下準差分配s的1- α StandUCL百分點。

Derivation of the control chart factor equations

- B3，基於 α 正規s下管制圖常數，或許可以由當 $m \rightarrow \infty$ 時，B31或B32界線得到。方程式如下：

$$B3 = \frac{sB3}{c4} \quad [19]$$

sB3：在s的自由度為 v_1 下準差分配s的
alphaStandLCL百分點。

Advantages of two-stage short-run ($\bar{\bar{x}}$, s) control charts

- 使用二階短製程($\bar{\bar{x}}$, s)管制圖有很多優勢，其中一個優勢是使用Patnaik (1950)近似比起使用二階短製程($\bar{\bar{x}}$, R)管制圖有比較小的自由度損失。

Advantages of two-stage short-run ($\bar{\bar{x}}$, s) control charts

■ Table 1 Comparison of degrees of freedom for c_4^* and d_2^*

n	2		5		10		25		50	
m	c_4^*	d_2^*	c_4^*	d_2^*	c_4^*	d_2^*	c_4^*	d_2^*	c_4^*	d_2^*
1	1.00000	1.00000	4.00000	3.82651	9.00000	7.68007	24.00000	15.62977	49.00000	24.02990
2	1.91952	1.91952	7.81543	7.47105	17.78069	15.14589	47.76168	31.02740	97.75573	47.82145
5	4.59060	4.59060	19.21294	18.35417	44.09875	37.51556	119.0374	77.20616	244.0184	119.1869
10	8.98907	8.98907	38.19043	36.47359	87.95388	74.78859	237.8272	154.1660	487.7879	238.1261
25	22.14078	22.14078	95.11138	90.81974	219.5142	186.6017	594.1947	385.0424	1219.095	594.9419
50	44.04420	44.04420	189.9757	181.3926	438.7796	372.9550	1188.140	769.8356	2437.941	1189.634
100	87.84479	87.84479	379.7029	362.5367	877.3099	745.6608	2376.030	1539.422	4875.632	2379.019
200	175.4428	175.4428	759.1566	724.8242	1754.370	1491.072	4751.810	3078.593	9751.014	4757.787
300	263.0400	263.0400	1138.610	1087.112	2631.430	2236.483	7127.590	4617.765	14626.39	7136.556

- 當 $n=2$ ， c_4^* 和 d_2^* 自由度相等。
- 在 $m=1$ 時，當 n 增加， d_2^* 損失自由度依某個比例增加。當 $n=50$ 時， d_2^* 自由度只有 c_4^* 的一半。
- 甚至當 $m=300$ 和 $n=2$ 時， c_4^* 自由度仍然近似自由度精確值 300 的 88%。

Advantages of two-stage short-run ($\bar{\bar{X}}$, s) control charts

- 很多作者提議當n變大時(i.e., in the case of Duncan (1974), when $n > 12$), 使用範圍估計製程變異, 效能損失就越大。
- 另一個可能的優勢, 使用有關Yang and Hillier's (1970) ($\bar{\bar{X}}$, $\sqrt{v}$)管制圖的二階短製程($\bar{\bar{X}}$, s)管制圖。兩種管制圖都是點出其平均數和標準差, 但是二階短製程($\bar{\bar{X}}$, s)管制圖比較容易執行且保持產品狀況。二階短製程($\bar{\bar{X}}$, $\sqrt{v}$)管制圖必須用樣本組變異數來建構, 變異數和標準差都要記錄。因此二階短製程($\bar{\bar{X}}$, s)管制圖因為只要計算並且紀錄樣本組標準差, 所以在比較真實自由度的損失 C_4^* 是有優勢的。

Advantages of two-stage short-run ($\bar{x}$, s) control charts

- 最後一個優勢是使用有關Yang and Hillier's(1970)($\bar{x}$, v)管制圖的二階短製程($\bar{x}$, s)管制圖，在製程失控下變異增加， $\bar{s}$ 比 $\bar{v}$ 的影響還要小。
- Burr (1976)說明使用 v 管制圖取代 s 管制圖的兩個缺點。

第一個缺點： v 管制圖中心線 $\bar{v}$ ，會被影響，最後會高於 v 管制圖中心線，導致沒有察覺特殊原因訊號。

第二個缺點： v 分配比起 s 分配是比較不對稱的。

Conclusions

- 本研究是第一次發展這個理論和導出計算因子方程式去決定二階短製程($\bar{X}$, s)管制圖管制界線，也提供廣泛的($\bar{X}$, s)管制圖參考文獻。