



A One-Sided EWMA Control Chart for Monitoring Proces Means



作 者：LIANJIE SHU, WEI JIANG, AND SHUJIN WU
出 處：Communications in Statistics – Simulation and
Computation, Vol.36: 901-920, 2007
報 告 者：郭秉裕
指 導 老 師：童超塵 教授



Content

- Introduction
- One-Sided Upper EWMA Charts
- An Example
- Design of EWMA Charts
- Performance Comparisons
- Concluding Remarks

Keywords: Average run length; Markov chain; Statistical process control

Introduction (1/2)

- 若非對稱品質成本存在時，傳統上雙邊EWMA管制圖較不具備有效性。因其當EWMA統計量遠低於目標值，需具較長之管制外訊號產生時間。
- 單邊EWMA管制圖為先假設一已知偏移方位，其基本原理為當計算逐次EWMA統計量過程中，對於目標值正偏差予以累積；負偏差則刪除至零。然為保持特定之誤警率，IEWMA管制界限因刪除負偏差觀察值至零而需適當被修正。

Introduction (2/2)

■ 文獻回顧：

- Robinson and Ho(1978)曾思考傳統EWMA管制圖上管制界限或下管制界限其一，來評估單邊EWMA管制圖之執行能力。
- Crowder and Hamilton(1992)對於監視製程標準差時，假定當EWMA統計量低於零時，則需重設其EWMA統計量為零之一單邊EWMA計畫。

One-Sided Upper EWMA Charts (1/5)

■ The traditional EWMA chart : 簡稱SEWMA

- 統計量 : $Q_t = (1 - \lambda)Q_{t-1} + \lambda X_t$
- 變異數 : $\sigma_Q^2 = \frac{\lambda}{2 - \lambda} [1 - (1 - \lambda)^{2t}] \sigma^2$
- 管制界限 : $\mu_0 \pm L \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}} \sigma$
- 上管制界限 : $h = \mu_0 + L \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}} \sigma$

- EWMA統計量之初始值常設定為目標值即 $Q_0 = \mu_0$ 。
- λ 為平滑常數，介於 $0 < \lambda < 1$ 之間。當 λ 值趨近極小值，則變異數將迅速收斂至 $\lambda\sigma^2/(2 - \lambda)$ 。



One-Sided Upper EWMA Charts (2/5)

■ Reset the traditional EWMA chart : 簡稱 REWMA

- 統計量 : $S_t = \max[\mu_0, (1 - \lambda)S_{t-1} + \lambda X_t]$

- 上管制界限 : $h = \mu_0 + L\sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}}\sigma$

■ 觀察值 X_t 之轉換 :

- 定義 : $X_t^+ = \max[\mu_0, X_t] = \mu_0 + \max[0, X_t - \mu_0]$

- 平均數 : $E(X_t^+) = \mu_0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma$

- 變異數 : $\sigma_{X_t^+}^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}\right)\sigma^2$

One-Sided Upper EWMA Charts (3/5)

■ The upper-sided IEWMA Chart : 簡稱IEWMA

- 統計量 : $W'_t = \lambda X_t^+ + (1 - \lambda)W'_{t-1}$

=>標準化得 $W_t = \lambda Z_t + (1 - \lambda)W_{t-1}$

- 上管制界限 : $E(X_t^+) + L\sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}}\sigma_{X_t^+}$

=>標準化得 $h = L\sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}}$

- 當 $\lambda=1$ 時，三種one-sided upper EWMA管制圖將簡化成 X_t^+ 之Shewhart管制圖，並且具有相同之執行能力。

One-Sided Upper EWMA Charts (4/5)

- 因三種管制圖皆為建構在 X_t 或 X_t^+ 上，當製程平均發生改變時，我們所感興趣為其 X_t 與 X_t^+ 之訊噪比(signal-to-noise ratios; SN ratios)，為方便計算，在本篇文章皆假設 $\mu_0=0$ 且 $X_t \sim N(\mu, \sigma^2)$ 。

- X_t^+ 之期望值：
$$E(X_t^+) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right) + \mu\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)$$
- X_t^+ 之訊噪比：
$$\text{SN}(X_t^+) = \frac{E(X_t^+) - E(X_t^+|\mu=0)}{\sigma_{X_t^+}} = \frac{E(X_t^+) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma}{\sigma\sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}\right)}}$$
- X_t 之訊噪比：
$$\text{SN}(X_t) = \frac{\mu}{\sigma}$$

One-Sided Upper EWMA Charts (5/5)

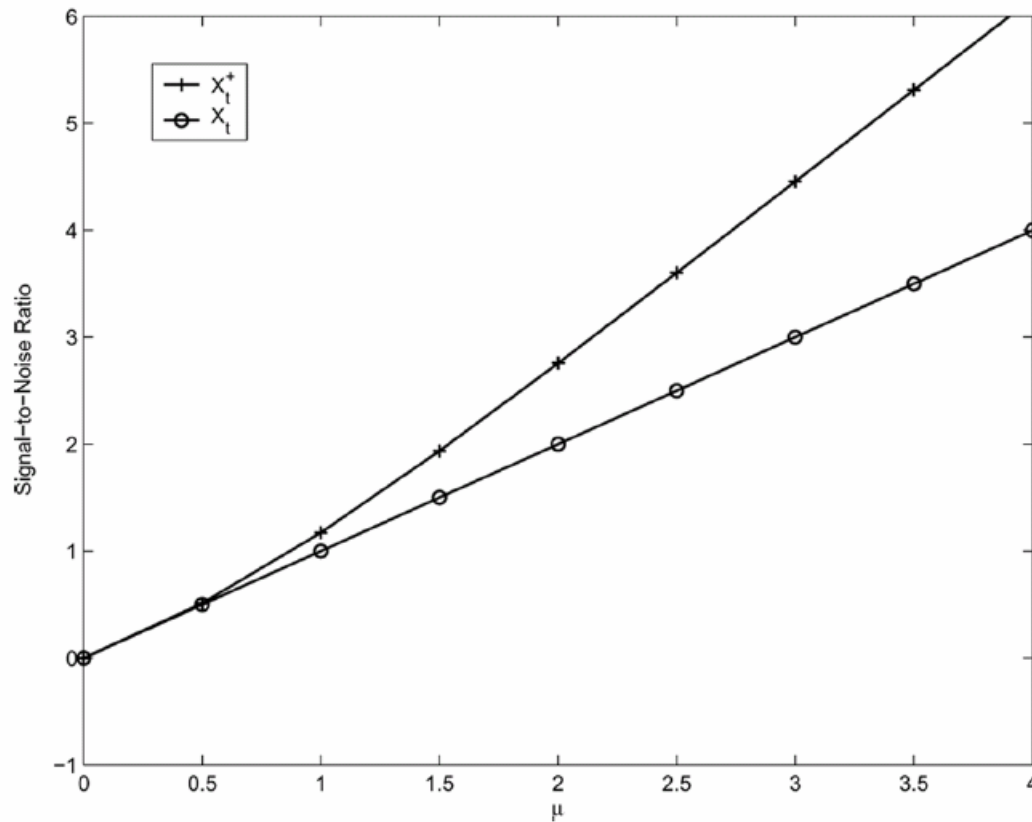


Figure 1. Signal-to-noise ratios of X_t and X_t^+

An Example

Table 1

An example of the one-sided upper EWMA charts

t	X_t	SEWMA	REWMA	IEWMA
		$h = 0.584$	0.629	0.685
0	—	0.0	0.0	0.0
1	1.0	0.100	0.100	0.103
2	-0.5	0.040	0.040	0.024
3	0.0	0.036	0.036	-0.046
4	-0.8	-0.048	0.0	-0.110
5	-0.8	-0.123	0.0	-0.167
6	-1.2	-0.231	0.0	-0.219
7	1.5	-0.058	0.150	-0.009
8	-0.6	-0.112	0.075	-0.076
9	1.0	-0.001	0.168	0.035
10	-0.9	-0.091	0.061	-0.037
11	1.7	0.089	0.225	0.189
12	1.0	0.180	0.302	0.273
13	3.1	0.472	0.582	0.709*
14	1.2	0.545	0.644*	0.775
15	1.6	0.650*	0.739	0.903
16	2.5	0.835	0.915	1.173
17	1.9	0.942	1.014	1.313
18	2.4	1.087	1.153	1.524
19	1.3	1.109	1.167	1.526

Note. * indicates out-of-control signals.

給定條件：

In-control ARL 500

前10抽至管制內目標值為零之觀察值
後9抽至導入 $\delta = 1.5$ 後之觀察值

參數設定：

SEWA、REWMA和IEWMA 其 λ 皆為0.1，L依序為2.545、2.741和2.986

- 當觀察值 X_t 為負值時，其統計量緩慢減少；當為正值時，則迅速增加尤其 X_t 為大時更明顯。
- 當製程平均發生偏移後，IEWMA 統計量成長速度較其他二者迅速。

Design of IEWMA Charts (1/2)

- Lucas and Saccucci(1990)根據兩階段設計程序來建立 IEWMA管制圖之結合參數 λ 與 L 架構。第一階段，明確地表達管制內之ARL及偏移大小水準以利迅速檢測，第二階段，同時選擇一結合 λ 與 L 致最小化管制外之ARL。對於IEWMA管制圖之最佳參數設計，並無一簡易方針去尋找，需執行大量數值計算以求近似最佳值(ex: grid search method)。

Design of IEWMA Charts (2/2)

Table 2
Optimal parameters of IEWMA charts

Shift	Parameter	Zero-state in-control ARL				
		100	200	300	500	1000
0.5	(λ, L)	(0.04, 1.298)	(0.04, 1.808)	(0.04, 2.086)	(0.04, 2.409)	(0.04, 2.810)
	ARL _{min}	12.31	17.51	20.74	25.24	31.57
1.0	(λ, L)	(0.04, 1.298)	(0.12, 2.545)	(0.11, 2.746)	(0.11, 3.046)	(0.09, 3.298)
	ARL _{min}	5.36	6.98	7.84	8.96	10.52
1.5	(λ, L)	(0.24, 2.543)	(0.25, 3.022)	(0.21, 3.158)	(0.20, 3.414)	(0.18, 3.722)
	ARL _{min}	3.23	3.87	4.25	4.73	5.41
2.0	(λ, L)	(0.43, 2.918)	(0.38, 3.282)	(0.36, 3.490)	(0.34, 3.741)	(0.30, 4.030)
	ARL _{min}	2.18	2.54	2.76	3.04	3.41
2.5	(λ, L)	(0.59, 3.103)	(0.55, 3.498)	(0.51, 3.692)	(0.47, 3.928)	(0.43, 4.239)
	ARL _{min}	1.62	1.84	1.98	2.17	2.41
3.0	(λ, L)	(0.72, 3.204)	(0.68, 3.608)	(0.64, 3.814)	(0.59, 4.053)	(0.58, 4.403)
	ARL _{min}	1.3	1.44	1.52	1.64	1.82
3.5	(λ, L)	(0.81, 3.254)	(0.79, 3.675)	(0.74, 3.882)	(0.70, 4.139)	(0.72, 4.512)
	ARL _{min}	1.13	1.2	1.25	1.33	1.44
4.0	(λ, L)	(0.91 ~ 1, 3.289 ~ 3.299)	(0.87, 3.707)	(0.85, 3.935)	(0.81, 4.201)	(0.81, 4.563)
	ARL _{min}	1.05	1.08	1.11	1.14	1.21

- 隨著製程平均偏移增加，最佳 λ 值亦增加。即較小之 λ 值對於小偏移較敏感；反之亦然。
- 在相同管制內之 ARL 來檢測特定平均偏移下 λ 值，IEWMA 較 two-sided EWMA 來的小。



Performance Comparisons (1/12)

■ Run Length Distribution Comparisons

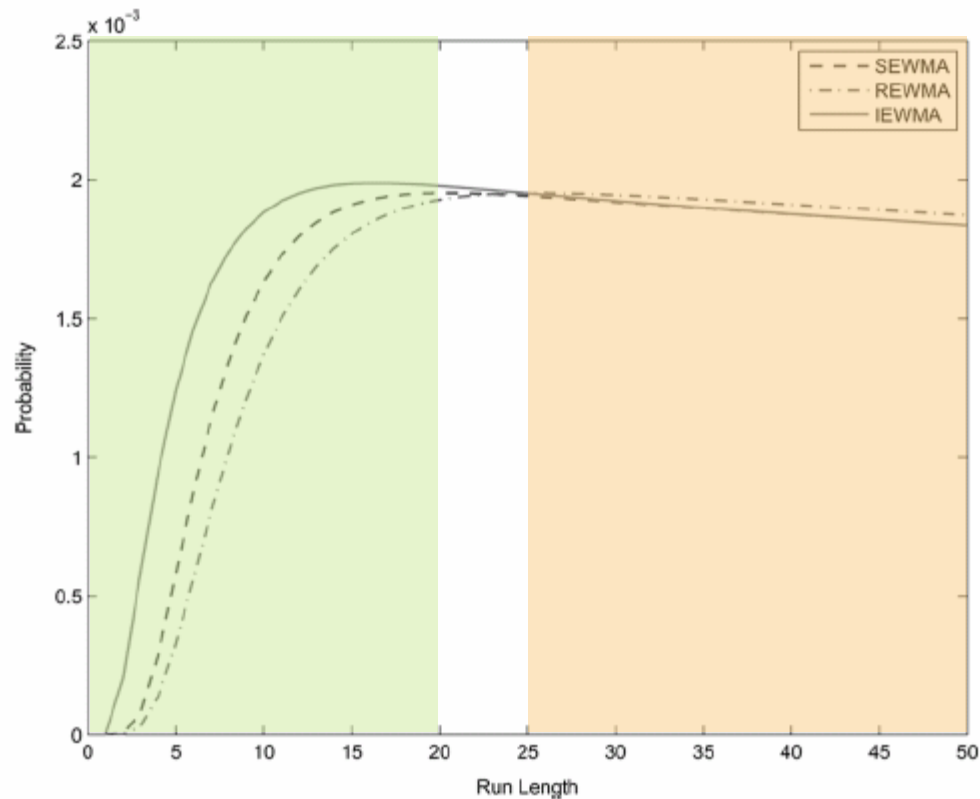


Figure 2. In-control run length PMF of the one-sided EWMA charts ($\lambda = 0.1$).

Performance Comparisons (2/12)

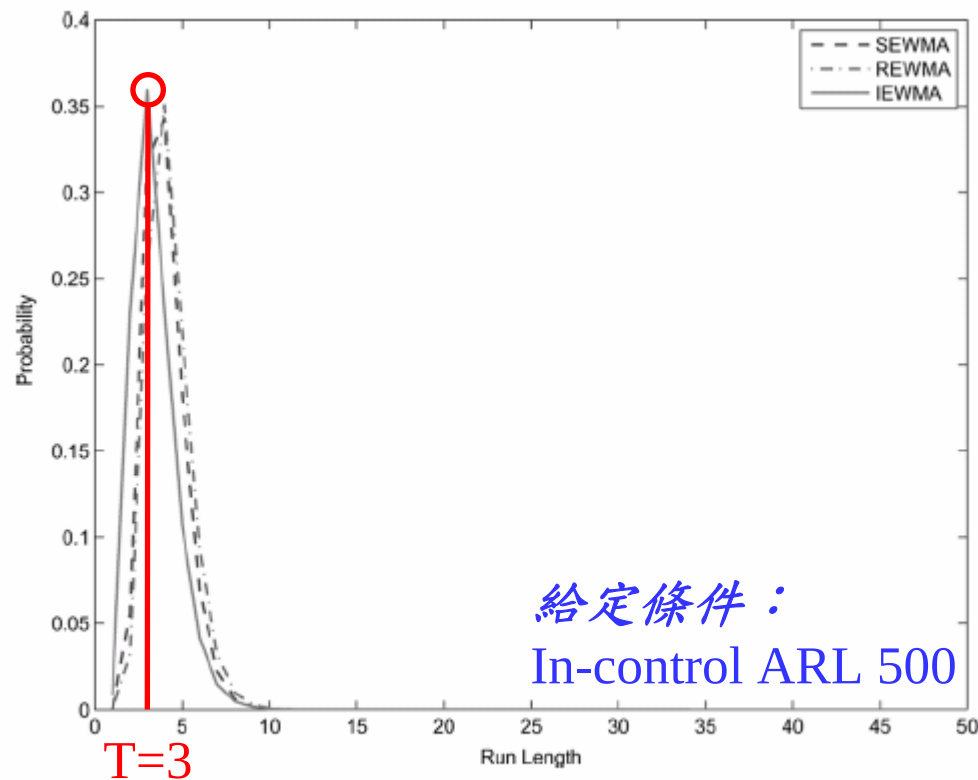


Figure 3. Out-of-control run length PMF of the one-sided EWMA charts when the process has shifted two standard deviations ($\lambda = 0.1$).



Performance Comparisons (3/12)

■ Average Run Length Comparisons

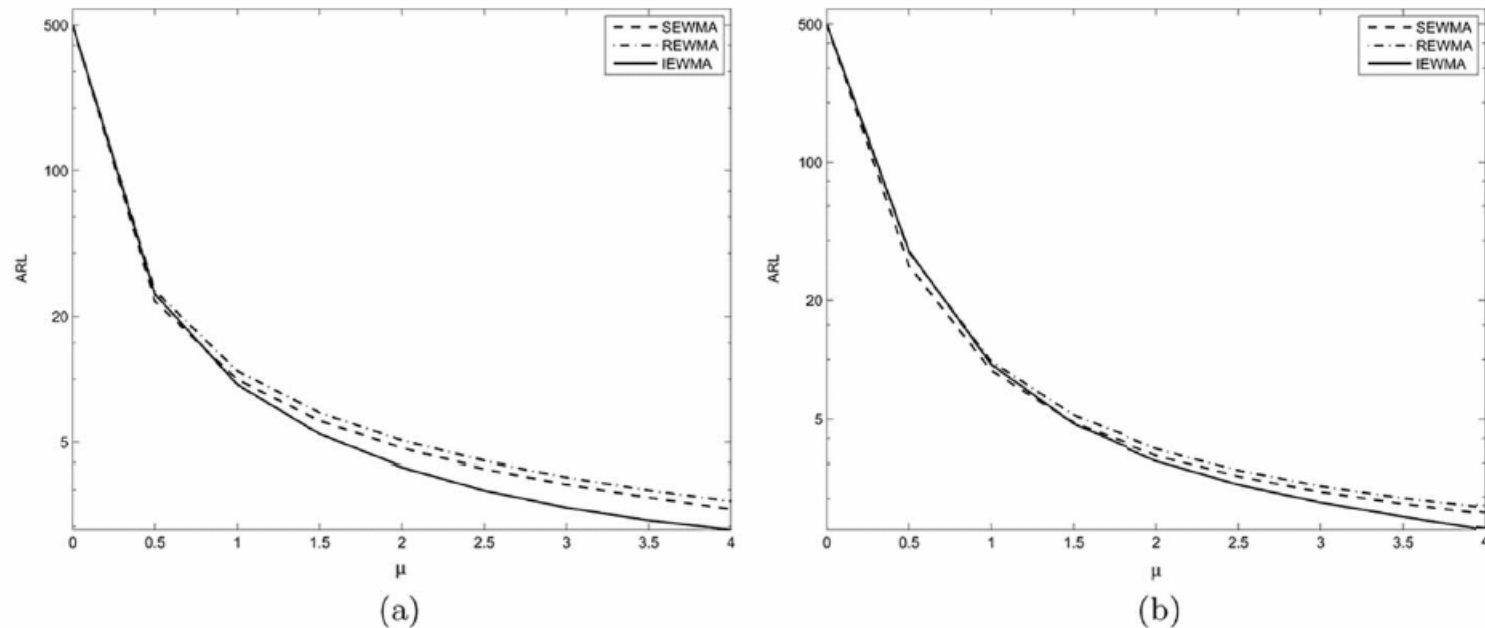


Figure 4. Zero-state ARL comparisons of the one-sided upper EWMA charts for (a) $\lambda = 0.05$, (b) $\lambda = 0.2$, (c) $\lambda = 0.5$, and (d) $\lambda = 1.0$.(續)

- 隨著 λ 值增加，三種upper EWMA管制圖在執行能力上差異亦隨之越小顯著。

Performance Comparisons (4/12)

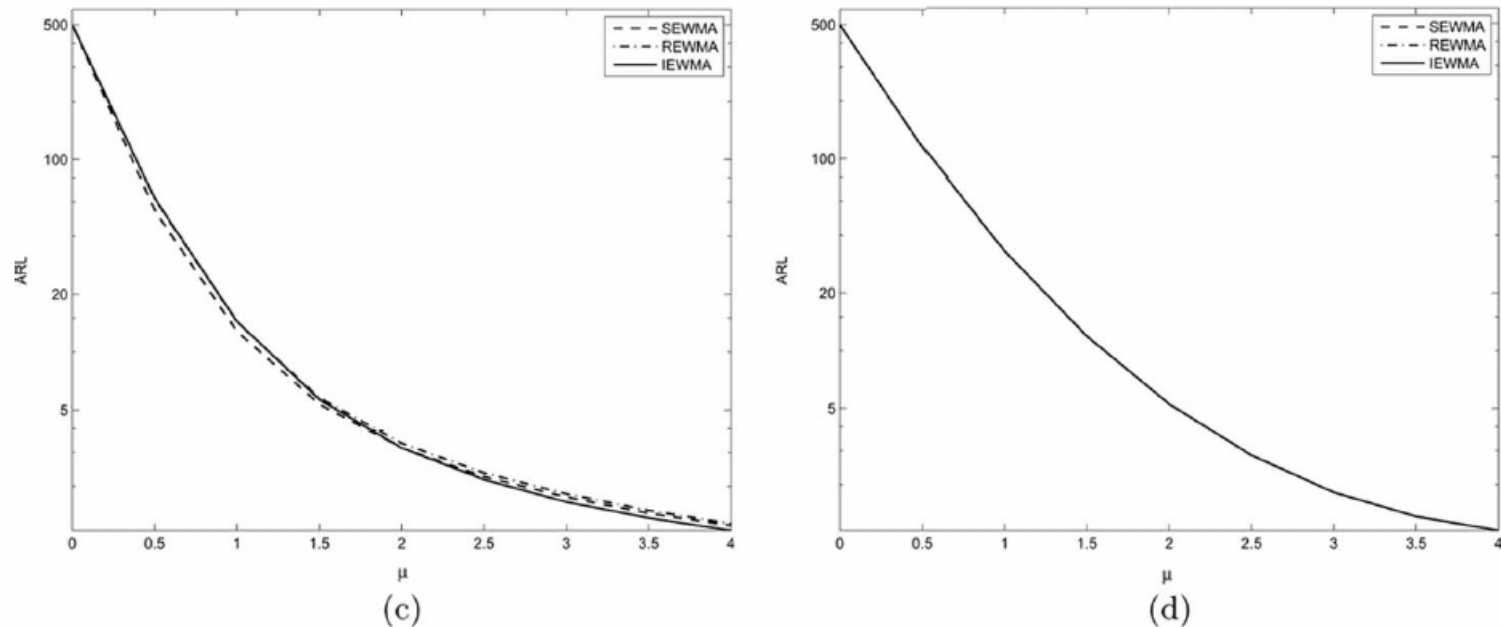


Figure 4. Zero-state ARL comparisons of the one-sided upper EWMA charts for (a) $\lambda = 0.05$, (b) $\lambda = 0.2$, (c) $\lambda = 0.5$, and (d) $\lambda = 1.0$.

- 在zero-state下欲比較三種upper EWMA管制圖皆使用相同 λ 值之ARL執行能力，但 λ 值對於檢測偏移大小相同之所有管制圖未必為最佳參數。

Performance Comparisons (5/12)

- Steady-state ARL：假設目標內製程平均直到特定偏移發生時，管制統計量所有可能值之ARL平均。
- Worst-case ARL：管制統計量在管制外所產生最大之ARL。

Performance Comparisons (6/12)

Table 3
ARL comparisons of the one-sided upper EWMA charts

Shift	Zero-state			Steady-state			Worst-case		
	SEWMA	REWMA	IEWMA	SEWMA	REWMA	IEWMA	SEWMA	REWMA	IEWMA
0.0	499.7	500.6	500.2	498.0	495.7	494.6	508.0	500.6	506.2
0.25	108.7	123.1	108.6	105.4	119.2	104.5	115.3	123.1	112.7
0.5	35.47	40.73	35.42	32.46	37.38	32.06	41.00	40.73	38.48
1.0	9.41	10.35	9.43	7.37	8.05	7.39	13.60	10.35	11.29
1.5	4.79	5.15	4.73	3.51	3.72	3.50	8.19	5.15	6.01
2.0	3.21	3.42	3.12	2.37	2.48	2.34	6.08	3.42	4.07
2.5	2.45	2.61	2.35	1.87	1.95	1.83	4.94	2.61	3.11
3.0	2.03	2.15	1.92	1.61	1.66	1.57	4.22	2.15	2.54
3.5	1.74	1.85	1.62	1.45	1.50	1.41	3.70	1.85	2.19
4.0	1.51	1.62	1.39	1.34	1.39	1.29	3.31	1.62	1.97

- 隨著偏移程度增加，其執行能力差異趨勢亦增加。且分析steady-state ARL與zero-state ARL之執行能力得到具有相似結果。
- 在所有不同狀態中，均無任一管制圖能獲得相對其他管制圖之一致最佳執行能力。

Performance Comparisons (7/12)

Comparison with Optimal CUSUM Charts

Table 4
Comparisons between the optimal IEWMA and upper CUSUM charts

Shift	$\mu_{opt} = 1\sigma$					$\mu_{opt} = 3\sigma$				
	IEWMA: $\lambda = 0.11, L = 3.046$ CUSUM: $k = 0.50, h_c = 4.390$					IEWMA: $\lambda = 0.59, L = 4.053$ CUSUM: $k = 1.50, h_c = 1.466$				
	Zero-state		Steady-state		Worst-case	Zero-state		Steady-state		Worst-case
	IEWMA	CUSUM	IEWMA	CUSUM	IEWMA	IEWMA	CUSUM	IEWMA	CUSUM	IEWMA
0	500.3	500.4	497.7	495.5	514.3	500.4	499.4	500.9	499.1	501.3
0.25	86.4	98.3	80.7	93.1	95.5	179.9	204.0	179.0	203.6	180.6
0.5	28.62	30.86	23.82	26.24	34.98	72.20	87.67	71.20	87.17	72.79
1.0	8.96	9.16	6.44	6.45	12.69	16.82	20.21	15.96	19.56	17.22
1.5	4.91	5.14	3.46	3.50	7.43	6.27	6.91	5.61	6.30	6.57
2.0	3.37	3.60	2.42	2.51	5.23	3.32	3.44	2.87	3.01	3.55
2.5	2.59	2.81	1.93	2.03	4.06	2.19	2.20	1.92	1.95	2.38
3.0	2.15	2.34	1.66	1.75	3.34	1.64	1.64	1.50	1.50	1.80
3.5	1.86	2.05	1.50	1.58	2.87	1.34	1.33	1.28	1.28	1.46
4.0	1.63	1.85	1.40	1.48	2.50	1.16	1.16	1.14	1.14	1.24

- 單邊上CUSUM管制圖定義為： $G_t = \max[0, X_t - k + G_{t-1}]$
- CUSUM管制圖中worst-case之ARL相等於其zero-state之ARL

Performance Comparisons (8/12)

- 由表四看出，當真實平均偏移不同於特定偏移時，其IEWMA管制圖相對於CUSUM管制圖較少受到干擾。

Example：假設actual mean shift為 3σ ；specified shift為 1σ ；in zero-state下則optimal ARL at $\mu = 3\sigma$

CUSUM(給定 $k=0.5$ 下) 計算得 $(2.34-1.64)/1.64 \times 100\% = 42.7\%$

IEWMA(給定 $\lambda = 0.11$ 下)計算得 $(2.15-1.64)/1.64 \times 100\% = 31.1\%$

Performance Comparisons (9/12)

With and Without Head Start

- 原因：前述研究結果其為建立在初始值 $W_0=0$ 上，但當製程一啟動即為管制外時，Lucas and Crosier(1982)指出加入快速起始反應(fast initial response；FIR)性質之管制圖對於啟動異常具有良好迅速監視效果。
- 方式：
 - Lucas and Crosier(1982)藉由執行一非零之head start(HS) value管制圖時，並建議HS value介於製程目標與管制界限之間i.e., 50% HS。

Performance Comparisons (10/12)

- MacGregor and Harris(1990)討論對於初始為少數觀察值可使用較狹窄界限，IEWMA統計量之變異數其隨時間變動經驗式(time-varying expression)可表達如下：

$$\sigma_{w_t}^2 = \frac{\lambda}{2 - \lambda} [1 - (1 - \lambda)^{2t}]$$

當 λ 較小時，早期時間變動變異數(time-varying variance)小於漸近變異數(asymptotic variance)，故以真實變異為基礎所建立之時間變動管制界限能克服漸近管制界限之遲鈍。

Performance Comparisons (11/12)

Table 5
FIR ARL values for IEWMA charts with $\lambda = 0.1$

Shift	%HS ($L = 2.991$)				Time-varying limit
	0	25	50	75	$L = 3.002$
0.0	499.7	498.4	476.9	426.1	499.7
0.5	28.05	25.05	21.20	16.16	24.44
1.0	8.99	7.64	5.94	4.13	6.70
1.5	4.98	4.12	3.22	2.21	3.20
2.0	3.42	2.84	2.17	1.54	2.01
2.5	2.64	2.19	1.67	1.24	1.49
3.0	2.19	1.80	1.37	1.10	1.22
3.5	1.90	1.52	1.19	1.04	1.10
4.0	1.67	1.31	1.08	1.01	1.03

- HS=0相當於探討zero-state之IEWMA管制圖。
- 當使用時間變動管制界限時，其管制界限需設計稍大，以便提供等同於不具有FIR性質管制圖之管制內ARL。

Performance Comparisons (12/12)

■ Comparison with Conventional EWMA Charts

Table 6
ARL comparison between two-sided IEWMA and
EWMA charts

Shift	Zero-state		Steady-state	
	IEWMA	EWMA	IEWMA	EWMA
0.0	499.6	499.5	499.6	499.5
0.5	37.16	36.14	30.59	30.09
1.0	10.57	10.24	7.39	7.07
1.5	5.66	5.69	3.84	3.78
2.0	3.84	3.96	2.67	2.69
2.5	2.92	3.09	2.11	2.17
3.0	2.40	2.56	1.79	1.86
3.5	2.08	2.22	1.60	1.66
4.0	1.86	2.01	1.49	1.54

參數設定：

two-sided IEWMA: $\lambda = 0.1$, $L = 3.374$; traditional EWMA: $\lambda = 0.15$, $L = 2.909$

Concluding Remarks (1/2)

- 研究顯示，IEWMA管制圖在不同zero-state、steady-state或worst-case之狀態下，其執行能力相對於傳統EWMA管制圖來的佳。尤其對於偏移大小而言，更具有廣泛偵測範圍，符合一優良監視偏移全域管制圖。
- 前述所提到FIR計畫之外，Lucas and Saccucci(1990)更提出結合Shewhart-EWMA管制圖和穩健EWMA管制圖之加強方針。雖此方針並未在本篇出現，但它已直接延伸至one-sided EWMA管制圖中。



Concluding Remarks (2/2)

- 本篇主要著重在管制內已知參數進行討論，但當參數為估計型式時，對於現有之IEWMA管制圖之執行能力是否會產生異動，有待往後探討！