The economically designed CUSUM chart for monitoring short production runs

出處：International Journal of Production Research,Vol. 44, No. 8, 15 April 2006,1569–1587

作者：GEORGE NENES and GEORGE TAGARAS*
報告者：鄭欣卉
指導老師：童超塵教授

Contents

- Introduction
- Problem setting and assumptions
- Stochastic model
- Cost model and minimization
- Numerical investigation of the chart's cost-effectiveness
- Case of unitary samples (n=1)
- Summary and conclusions

Introduction

- 起初管制圖設計只考慮到統計特性，然而管制圖參數的選擇在運作相關成本和間接成本上有重要的影響，目前研究者努力從經濟觀點發展最佳管制圖設計模型。
- 很多經濟設計模型都是從Duncan's (1956)衍生來的。大部分的模型假設製程在連續運作和無限期地監控。這些假設允許製程是同一個連續隨機週期，直到發覺可歸屬原因並且修復才結束。
- 實際上大部分的產品運作不是無限期地，反而是週期性地生產特定的量在特定的期間。因此，製程管制計畫應把產品製程長度考慮進來，以達到最大效益。

Introduction

Ladany (1973)	第一個提出方法來選擇修華特p管制圖經濟設計最佳參數來監控短製程。
Ladany and Bedi(1976)	允許製程長度可為決策變數的相似模型。
Del Castillo and Montgomery (1993) and Tagaras (1996)	這些方法被改造用來設計修華特　管制圖。
Del Castillo and Montgomery (1993)	製程長度對管制圖設計的影響。
Del Castillo and Montgomery (1996)	在製程還沒結束發現可歸屬原因後製程停止背景下，製程長度對管制圖設計的影響。

Introduction

- 然而在預期製程偏移很小的情況下利用CUSUM管制圖監控短製程，到目前還沒有被有系統地研究。所以本研究將探討是否、何時、如何使用CUSUM管制圖在短製程統計製程管制。
- 本研究貢獻

  (a)發展一個短製程CUSUM管制圖經濟最佳化模型。

  (b)調查在這樣的情況下相對在連續長製程使用CUSUM管制圖設計顯著有效。

Introduction

Taylor (1968)	最早提出CUSUM管制圖經濟設計。
Goel and Wu(1973)	提出一個與Taylor (1968)很相似的經濟設計模型。
Chiu (1974)	提出最大化單位時間利潤模型和簡單的敏感度分析。

Introduction

- 以上連續運作模型都有以下關鍵特徵和假設：

(a)只考慮單邊管制圖，假設存在單一可歸屬原因或多重原因對平均數有相似的影響，且偏移量是固定的。

(b)這些品質特徵服從已知且相同變異數之常態分配。

(c)發生可歸屬原因的時間服從指數分配隨機變數。

現在的研究也採用這些假設。

Problem setting and assumptions

- 生產特定一批產品的時間為T單位時間，衡量製程品質為連續隨機變數X，目標值μ_0。假設 $\overline{X}=\mu_0$，X~N(μ_0, σ^2)，製程一開始在統計管制下運作且保持穩定，發生可歸屬原因的時間~Exp(λ)，μ_0會偏移到$\mu_1=\mu_0+\delta\sigma$，但是σ^2不變。

Problem setting and assumptions

- 在樣本數為n 的h單位時間抽樣間隔下，製程從0開始到$T=(I_s+1)h$結束。
- 不同於先前研究在於製程長度T是被限制的。意思是說可歸屬原因或許不會出現在特定製程長度，但是不管怎樣設備將被重排給下個製程運作，也就是當在某個時間察覺發生可歸屬原因$T_d<T$，開始進行製程修復使回到管制內，之後重新開始運作剩餘的淨運作時間$T-T_d$直到整批貨完成，但也有可能在剩餘淨運作時間$T-T_d$再次發生可歸屬原因。

Problem setting and assumptions

- 單邊CUSUM管制圖用來觀察平均數是否像上偏移，CUSUM統計量：

$$C(t) = \max\{0, C(t-1) + z_t - k\}, \quad t = 1, 2, \ldots, I_s, \quad C(0) = 0, \qquad (1)$$

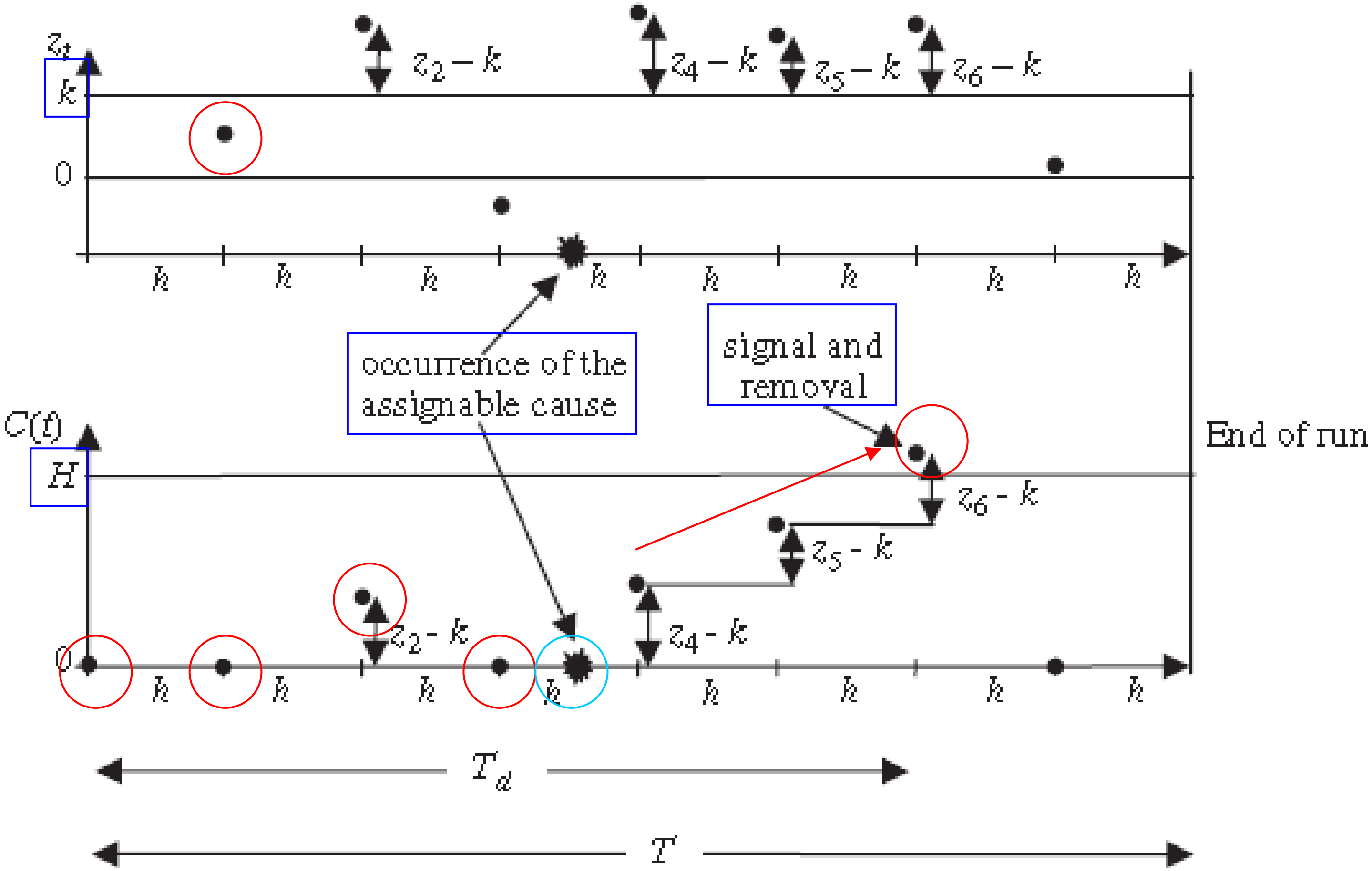
$$z_t = (\bar{x}_t - \mu_0)\sqrt{n}/\sigma$$

K：參考值

- 當C(t)超出管制界線H時就會發出警告。

Problem setting and assumptions

- Figure 1. Example of process monitoring and chart operation



Problem setting and assumptions

- CUSUM管制圖設計參數：$h(l_s)$、n、k、H。
- Y_t：樣本t的製程真實情況，$Y_t=0$管制內，$Y_t=1$管制外。
- 製程離散時間隨機模型和其監控計畫是基於Y_t和C(t)的組合$(t=0,1,\ldots,l_s)$。(Y_t, C(t))組合構成一個二次馬可夫鏈，而在$Y_t=0$的條件下，可歸屬原因發生在h抽樣間隔第t和t+1抽樣間機率γ：

$$\gamma = 1 - e^{-\lambda h}. \qquad (2)$$

Stochastic model

- Y_t是離散變數，然而C(t)理論上是連續隨機變數，為了實際上計算，本研究根據Brook and Evans (1972)提出的方法，將其拆成m+1個值。本研究藉由第一次定義w為1~m-1子區間的寬度，將0~H區間分割成m子區間，如下：

$$w = \frac{2H}{2m-1} \Leftrightarrow m = \frac{H}{w} + \frac{1}{2}.$$

Stochastic model

- 藉由以下的方法將真實的C(t)轉為一個介於0~m間的整數：

$$
\begin{aligned}
&\text{for } C(t) < \frac{w}{2} \rightarrow C(t) = 0 \\
&\text{for } \left(i - \frac{1}{2}\right) w \le C(t) < \left(i + \frac{1}{2}\right) w \rightarrow C(t) = i, \quad i = 1, 2, \ldots, m-1 \\
&\text{for } \left(m - \frac{1}{2}\right) w \le C(t) \rightarrow C(t) = m.
\end{aligned}
$$

- 馬可夫鏈(Y_t，C(t))有2m+2情況和轉換機率表示如下：

$$
\begin{aligned}
p_{ij} &= P\left[C(t) = j, Y_t = 0 \middle| C(t-1) = i, Y_{t-1} = 0\right] \\
p_{ij'} &= P\left[C(t) = j', Y_t = 1 \middle| C(t-1) = i, Y_{t-1} = 0\right] \\
p_{i'j} &= P\left[C(t) = j, Y_t = 0 \middle| C(t-1) = i', Y_{t-1} = 1\right] \\
p_{i'j'} &= P\left[C(t) = j', Y_t = 1 \middle| C(t-1) = i', Y_{t-1} = 1\right].
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

Stochastic model

- 因此，(2m+2) ×(2m+2)轉換機率矩陣：

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \begin{array}{cc} Y_t = 0 & Y_t = 1 \\ j=0\ \ j=1\ \ j=2\ \ \ldots\ \ j=m & j'=0\ \ j'=1\ \ j'=2\ \ \ldots\ \ j'=m \end{array} \\
\boldsymbol{P} = & \begin{array}{cc} & i=0 \\ Y_{t-1}=0 & i=1 \\ & \vdots \\ & i=m \\ & i'=0 \\ & i'=1 \\ Y_{t-1}=1 & \vdots \\ & i'=m \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} p_{ij} & p_{ij'} \\ \hline p_{i'j} & p_{i'j'} \end{array}\right]
\end{array}
$$

P被切割成四個象限，個別表示Y_{t-1}和Y_t四個任何可能的組合從C(t-1)移動到C(t)的機率。

Stochastic model

- 基於以上隨機模型，可以計算使用CUSUM管制圖不同統計績效衡量：
  - 在抽樣t犯型一誤差的機率為 $p_{0m}^{(t)}$。
  - 在任何I_s抽樣中發生型一誤差的機率為 $p_{0m}^{(I_s)}$。

Cost model and minimization

- **Sampling and inspection cost** = (cn+b) ‧ I_s

- **Cost of operating in the out-of-control state**
  - M：每單位時間在管制外運作的成本。
  - 在(th，(t+1)h)抽樣間隔中，有兩種情況下產生成本：

    (i)製程一開始就已經失控，此種情況發生的機率 $\sum_{j'=0}^{m-1} p_{0j'}^{(t)}$ 。

    整個製程仍是失控的成本Mh。

    發生平均總次數 (I_s抽樣次數) $\sum_{t=1}^{I_s} \sum_{j'=0}^{m-1} p_{0j'}^{(t)}$

Cost model and minimization

(ii)在th時間點，製程在管制內，但是在(th，(t+1)h)發生偏移。

在th時間點，製程在管制內的機率 $\sum_{j=0}^{m} p_{0j}^{(t)} + p_{0m'}^{(t)}$

偏移發生在此間隔的機率 γ；

在失控運作的平均時間 $h-\tau$

失控下總期望運作成本：

$$Mh\left(\sum_{t=1}^{I_s}\sum_{j'=0}^{m-1} p_{0j'}^{(t)}\right) + M\gamma(h-\tau)\cdot\left(1+\sum_{t=1}^{I_s}\sum_{j=0}^{m} p_{0j}^{(t)} + \sum_{t=1}^{I_s} p_{0m'}^{(t)}\right)$$

$$= Mh\left(\sum_{t=1}^{I_s}\sum_{j'=0}^{m-1} p_{0j'}^{(t)}\right) + M\left(h-\frac{\gamma}{\lambda}\right)\cdot\left(1+\sum_{t=1}^{I_s}\sum_{j=0}^{m} p_{0j}^{(t)} + \sum_{t=1}^{I_s} p_{0m'}^{(t)}\right).$$

Cost model and minimization

- **Cost of false alarms**
  - L_0：假警報的成本
  - 當(Y_t, C(t))=(0，m)發佈假警報，直到週期結束的期望假警報成本：$L_0(\sum_{t=1}^{I_s} p_{0m}^{(t)})$
- **Cost of restoring the process to the in-control state**
  - L_1：修復製程的成本
  - 當(Y_t, C(t))=(1，m)發佈真實警報，修復製程回到管制內的總成本：$L_1(\sum_{t=1}^{I_s} p_{0m'}^{(t)})$

Cost model and minimization

- **Minimization of total expected cost**
  - 製程一開始在管制內的期望總成本：

$$E(\mathrm{TC}) = (cn+b)\cdot I_s + M\left(h-\frac{\gamma}{\lambda}\right)\cdot\left(1+\sum_{t=1}^{I_s}\sum_{j=0}^{m}p_{0j}^{(t)}+\sum_{t=1}^{I_s}p_{0m'}^{(t)}\right) + Mh\left(\sum_{t=1}^{I_s}\sum_{j'=0}^{m-1}p_{0j'}^{(t)}\right) + L_0\left(\sum_{t=1}^{I_s}p_{0m}^{(t)}\right) + L_1\left(\sum_{t=1}^{I_s}p_{0m'}^{(t)}\right). \quad (4)$$

  - 經濟設計的目標是找到能夠最小化E(TC)的n,I_s,k,H設計參數值。

Cost model and minimization

- 設定I_s=0以啟動最佳演算法，其E(TC)：

$$E(\mathrm{TC}|I_s=0)=M\cdot[T-(1-\exp\{-\lambda\cdot T\})/\lambda]. \qquad (5)$$

- 繼續I_s=1，n=1,2,...，決定最佳k,H組合和紀錄各別的E(TC|I_s,n)，直到E(TC|I_s,n)在某個n下開始增加。注意當I_s≧1，本研究依然檢查當n=0的情況。預防維護期望成本相對SPC成本小，計算如下：

$$E(\mathrm{TC}|I_s,n=0)=M\cdot\left(h-\frac{\gamma}{\lambda}\right)\cdot(I_s+1)+[L_0\cdot(1-\gamma)+L_1\cdot\gamma]\cdot I_s. \qquad (6)$$

- 為了促進最佳化程序，規定 $M\gamma/\lambda>L_1$，在任何n,I_s組合下給予最佳化H+K上界：

$$H+k\le-\frac{\ln(\gamma(M\gamma/\lambda-L_1)/(L_0(1-\gamma)))}{\delta\sqrt{n}}+\frac{\delta\sqrt{n}}{2}. \qquad (7)$$

Numerical investigation of the chart's cost-effectiveness

- 目的：

(a)CUSUM管制圖最佳設計不同成本和製程參數的影響。

(b)使用CUSUM管制圖特別設計監控短製程對應正規CUSUM管制圖監控長製程，預測其潛在的價值。

- 藉由Chiu (1974)或Lorenzen and Vance (1986) 的經濟模型的執行決定CUSUM管制圖經濟設計最佳參數，因為模型需要決定設計參數組合的ARL_s是相當麻煩的。方便的計算連續運作下**長製程單位時間期望成本**ECT_∞，從下式評估ECT_∞：

$$\mathrm{ECT}_\infty = \frac{cn + b + M\left(h - \frac{\gamma}{\lambda}\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} \pi_j + \pi_{m'}\right) + Mh\left(\sum_{j'=0}^{m-1} \pi_{j'}\right) + L_0 \pi_m + L_1 \pi_{m'}}{h + \pi_m \tau_s + \pi_{m'}(\tau_s + \tau_r)} \tag{8}$$

Numerical investigation of the chart's cost-effectiveness

- 成本參數(c,b,M,L_0,L_1)和製程參數(λ, δ)，用兩種水準來檢查，總共2^5=32組合，在兩種不同製程長度T=8(cases 1-32)和T=40(cases 33-64)下檢查。

Numerical investigation of the chart's cost-effectiveness

- Table 1. Parameter sets of the 64 numerical examples

Case	T	b	M	L_0	λ	δ
1 (33)	8 (40)	0	100	50	0.01	0.5
2 (34)	8 (40)	0	100	150	0.01	0.5
3 (35)	8 (40)	0	1000	50	0.01	0.5
4 (36)	8 (40)	0	1000	150	0.01	0.5
5 (37)	8 (40)	5	100	50	0.01	0.5
6 (38)	8 (40)	5	100	150	0.01	0.5
7 (39)	8 (40)	5	1000	50	0.01	0.5
8 (40)	8 (40)	5	1000	150	0.01	0.5
9 (41)	8 (40)	0	100	50	0.05	0.5
10 (42)	8 (40)	0	100	150	0.05	0.5
11 (43)	8 (40)	0	1000	50	0.05	0.5
12 (44)	8 (40)	0	1000	150	0.05	0.5
13 (45)	8 (40)	5	100	50	0.05	0.5
14 (46)	8 (40)	5	100	150	0.05	0.5
15 (47)	8 (40)	5	1000	50	0.05	0.5
16 (48)	8 (40)	5	1000	150	0.05	0.5
17 (49)	8 (40)	0	100	50	0.01	1
18 (50)	8 (40)	0	100	150	0.01	1
19 (51)	8 (40)	0	1000	50	0.01	1
20 (52)	8 (40)	0	1000	150	0.01	1
21 (53)	8 (40)	5	100	50	0.01	1
22 (54)	8 (40)	5	100	150	0.01	1
23 (55)	8 (40)	5	1000	50	0.01	1
24 (56)	8 (40)	5	1000	150	0.01	1
25 (57)	8 (40)	0	100	50	0.05	1
26 (58)	8 (40)	0	100	150	0.05	1
27 (59)	8 (40)	0	1000	50	0.05	1
28 (60)	8 (40)	0	1000	150	0.05	1
29 (61)	8 (40)	5	100	50	0.05	1
30 (62)	8 (40)	5	100	150	0.05	1
31 (63)	8 (40)	5	1000	50	0.05	1
32 (64)	8 (40)	5	1000	150	0.05	1

C=1，L_1=150，

$$\tau_s = \tau_r = 0$$

Numerical investigation of the chart's cost-effectiveness

- 最佳CUSUM設計目標是最小化期望成本(方程式4)。
- 允許k=0,0.1,0.2,…,和w=0.1，H初始值0.05，0.1為一階段，所以H=0.05,0.15,0.25,…
- 用相同的方法導出長製程ECT_{∞}的最佳參數。

Numerical investigation of the chart's cost-effectiveness

- Table 2. CUSUM charts and comparisons for T=8

Case	Optimal finite CUSUM h	n	k	H	$E(\mathrm{TC})$	Adapted optimal infinite CUSUM h_∞	$\tilde{h}_\infty$	n_∞	k_∞	H_∞	$E(\mathrm{TC})$	Percentage cost penalty
1	8.00	[1]	[1]	[1]	31.16	4.62	4.00	9	0.3	0.75	40.82	31.0
2	8.00	[1]	[1]	[1]	31.16	6.02	8.00	19	0.8	0.85	31.16	0.0
3	2.00	11	0.4	0.45	177.64	1.34	1.33	9	0.3	0.85	180.12	1.4
4	2.67	23	1	0.45	205.86	1.90	2.00	20	0.8	0.85	207.44	0.8
5	8.00	[1]	[1]	[1]	31.16	6.52	8.00	12	0.3	0.55	31.16	0.0
6	8.00	[1]	[1]	[1]	31.16	7.63	8.00	23	0.9	0.65	31.16	0.0
7	2.67	14	0.4	0.35	192.31	2.00	2.00	12	0.3	0.55	192.80	0.3
8	2.67	23	1	0.45	215.86	2.39	2.67	24	0.9	0.65	215.88	0.0
9	4.00	9	0	0.75	129.12	2.15	2.00	8	0.2	0.85	141.92	9.9
10	4.00	14	0	1.55	137.97	3.03	2.67	18	0.7	0.85	153.48	11.2
11	0.73	10	0.3	0.75	461.24	0.64	0.62	9	0.3	0.75	463.69	0.5
12	1.00	21	0.9	0.65	542.55	0.84	0.80	19	0.8	0.85	546.92	0.8
13	4.00	9	0	0.75	134.12	3.21	2.67	11	0.2	0.55	148.40	10.6
14	8.00	[1]	[1]	[1]	140.64	3.74	4.00	21	0.8	0.65	144.85	3.0
15	1.00	12	0.3	0.45	501.93	0.91	0.89	12	0.3	0.55	503.40	0.3
16	1.14	23	0.9	0.55	574.34	1.06	1.00	23	0.9	0.65	578.56	0.7
17	8.00	[1]	[1]	[1]	31.16	3.35	4.00	6	1	0.75	31.89	2.3
18	8.00	[1]	[1]	[1]	31.16	4.13	4.00	9	1.4	0.75	34.82	11.7
19	1.14	6	0.9	0.85	125.31	1.04	1.00	6	1	0.75	126.02	0.6
20	1.33	9	1.4	0.75	138.92	1.28	1.33	9	1.4	0.75	138.92	0.0
21	8.00	[1]	[1]	[1]	31.16	5.30	4.00	8	1.2	0.35	38.53	23.7
22	8.00	[1]	[1]	[1]	31.16	5.80	4.00	11	1.5	0.55	41.55	33.3
23	1.60	8	1.1	0.55	147.58	1.64	1.60	8	1.2	0.35	147.72	0.1
24	2.00	12	1.5	0.65	157.67	1.73	1.60	11	1.5	0.65	159.38	1.1
25	2.67	7	1.3	0.25	113.58	1.42	1.33	5	0.9	0.85	120.22	5.8
26	2.67	9	1.6	0.45	119.08	1.81	2.00	8	1.3	0.85	122.16	2.6
27	0.50	6	1	0.75	325.91	0.47	0.47	6	1	0.75	326.06	0.0
28	0.62	9	1.3	0.85	360.55	0.58	0.57	9	1.4	0.75	360.93	0.1
29	4.00	8	0	1.45	121.36	2.54	2.67	8	1.1	0.45	124.05	2.2
30	4.00	11	0	2.05	124.55	2.78	2.67	11	1.5	0.55	130.14	4.5
31	0.80	8	1.1	0.45	383.20	0.74	0.73	8	1.2	0.35	383.54	0.1
32	0.80	11	1.4	0.75	410.67	0.81	0.80	11	1.5	0.55	410.79	0.0

Note: [1]No monitoring is optimal ($h = T$).

Numerical investigation of the chart's cost-effectiveness

- Table 3. CUSUM charts and comparisons for T=40

Case	Optimal finite CUSUM h	n	k	H	$E(\mathrm{TC})$	Adapted optimal infinite CUSUM h_∞	$\tilde{h}_\infty$	n_∞	k_∞	H_∞	$E(\mathrm{TC})$	Percentage cost penalty
33	5.71	10	0.3	0.65	325.79	4.62	4.44	9	0.3	0.75	328.90	1.0
34	8.00	23	0.9	0.65	376.56	6.02	5.71	19	0.8	0.85	382.13	1.5
35	1.54	10	0.3	0.75	1020.51	1.34	1.33	9	0.3	0.85	1021.36	0.1
36	2.11	21	0.9	0.65	1229.36	1.90	1.90	20	0.8	0.85	1229.84	0.0
37	8.00	13	0.3	0.45	351.09	6.52	6.67	12	0.3	0.55	351.83	0.2
38	10.00	26	0.9	0.55	396.08	7.63	8.00	23	0.9	0.65	396.56	0.1
39	2.11	13	0.4	0.45	1126.53	2.00	2.00	12	0.3	0.55	1126.69	0.0
40	2.50	24	0.9	0.65	1313.06	2.39	2.35	24	0.9	0.65	1313.62	0.0
41	2.50	9	0.2	0.75	881.87	2.15	2.11	8	0.2	0.85	884.51	0.3
42	3.33	19	0.7	0.85	1002.46	3.03	3.08	18	0.7	0.85	1003.60	0.1
43	0.66	9	0.3	0.75	2447.67	0.64	0.63	9	0.3	0.75	2448.41	0.0
44	0.91	20	0.9	0.65	2924.93	0.84	0.83	19	0.8	0.85	2925.62	0.0
45	3.64	11	0.1	0.55	942.35	3.21	3.33	11	0.2	0.55	942.50	0.0
46	4.00	22	0.8	0.65	1049.90	3.74	3.64	21	0.8	0.65	1053.14	0.3
47	0.91	12	0.3	0.55	2692.03	0.91	0.91	12	0.3	0.55	2692.03	0.0
48	1.08	23	0.9	0.65	3119.51	1.06	1.05	23	0.9	0.65	3120.03	0.0
49	3.64	6	0.9	0.85	239.39	3.35	3.33	6	1	0.75	239.92	0.2
50	4.44	9	1.3	0.85	261.87	4.13	4.00	9	1.4	0.75	263.00	0.4
51	1.05	6	1	0.75	683.47	1.04	1.05	6	1	0.75	683.47	0.0
52	1.29	9	1.4	0.75	768.21	1.28	1.29	9	1.4	0.75	768.21	0.0
53	5.71	8	1.1	0.45	276.07	5.30	5.00	8	1.2	0.35	277.77	0.6
54	6.67	12	1.6	0.45	294.11	5.80	5.71	11	1.5	0.55	294.45	0.1
55	1.67	8	1.2	0.35	824.80	1.64	1.67	8	1.2	0.35	824.80	0.0
56	1.82	11	1.6	0.45	892.38	1.73	1.74	11	1.5	0.65	892.45	0.0
57	1.74	6	1	0.65	692.69	1.42	1.43	5	0.9	0.85	694.22	0.2
58	2.11	9	1.3	0.85	744.15	1.81	1.82	8	1.3	0.85	745.58	0.2
59	0.47	6	1	0.75	1695.25	0.47	0.47	6	1	0.75	1695.35	0.0
60	0.59	9	1.4	0.75	1886.94	0.58	0.58	9	1.4	0.75	1887.01	0.0
61	2.67	8	1.1	0.45	777.89	2.54	2.50	8	1.1	0.45	778.88	0.1
62	2.86	11	1.5	0.55	818.75	2.78	2.86	11	1.5	0.55	818.75	0.0
63	0.75	8	1.1	0.45	2016.57	0.74	0.74	8	1.2	0.35	2016.66	0.0
64	0.82	11	1.5	0.55	2169.99	0.81	0.82	11	1.5	0.55	2169.99	0.0

Numerical investigation of the chart's cost-effectiveness

- 短製程CUSUM與連續運作CUSUM最佳參數沒有很大的不同。h_∞在多數情況下小於h。
- 對h和h_∞關係的評論，顯示出這些情況都是需要被監控的，但是還是有很多情況不需要監控是最佳的(在T=8，當M很小，c,b,L_0和L_1很大時)。
- 如果排除不需要監控的情況，大多數連續運作CUSUM管制圖在短製程有比較低的懲罰成本，只有少數超過1.5%。
- 經濟設計方法有模型參數估計的問題，即使無法精確估計，但是其對品質管制圖設計的影響卻很重要，因此本研究利用敏感度分析成本參數M,L_0, L_1,c和製程參數λ ,δ。

Numerical investigation of the chart's cost-effectiveness

- Table 4. Effects of incorrect estimation of process and cost parameters

Parameter	Estimation error	Average cost penalty (%)	Maximum cost penalty (%)
M	20% underestimation	0.63	4.86
	20% overestimation	0.46	2.57
L_0	20% underestimation	0.31	1.03
	20% overestimation	0.15	0.50
L_1	20% underestimation	0.02	0.77
	20% overestimation	0.04	1.94
c	20% underestimation	0.42	1.31
	20% overestimation	0.27	0.65
λ	20% underestimation	0.37	1.94
	20% overestimation	0.28	1.08
δ	20% underestimation	1.70	4.00
	20% overestimation	1.44	3.56

Numerical investigation of the chart's cost-effectiveness

- 這觀察的實用涵義是在模型參數估計可能不精確但並不會失去其在經濟方法上的價值。
- 在連續運作Shewhart-type $\overline{X}$ 管制圖經濟設計下，Montgomery (2001)也指出最佳經濟設計在錯誤估計偏移量是相對更敏感，也就是說準確估計偏移量是應該被重視的。

Case of unitary samples (n=1)

- 監控製程平均數CUSUM管制圖通常只抽一個樣本且有很多應用(Hawkins and Olwell 1998)。

Case of unitary samples (n=1)

- Table 5. CUSUM charts and comparisons for T=8 and n=1.

	Optimal finite CUSUM					Adapted optimal infinite CUSUM				
Case	h	k	H	E(TC)	h_∞	$\tilde{h}_\infty$	k_∞	H_∞	E(TC)	Percentage cost penalty
1	8.00	[1]	[1]	31.16	0.61	0.62	0	4.75	49.12	57.6
2	8.00	[1]	[1]	31.16	0.32	0.32	0.2	6.75	60.62	94.5
3	0.25	0	4.15	195.56	0.18	0.18	0	4.95	197.53	1.0
4	0.14	0.2	6.15	241.98	0.09	0.09	0.2	7.15	248.79	2.8
5	8.00	[1]	[1]	31.16	10.40	8.00	[2]	[2]	31.16	0.0
6	8.00	[1]	[1]	31.16	2.37	2.67	0	2.35	50.04	60.6
7	2.67	[2]	[2]	210.99	3.2	2.67	[2]	[2]	210.99	0.0
8	4.00	0	0.15	286.94	0.66	0.67	0	2.55	331.40	15.5
9	4.00	0	0.35	134.95	0.31	0.31	0	4.45	156.86	16.2
10	8.00	[1]	[1]	140.64	0.18	0.18	0.1	7.95	179.14	27.4
11	0.10	0	4.45	491.50	0.08	0.08	0	4.95	493.18	0.3
12	0.06	0.1	7.95	608.73	0.04	0.04	0.2	7.25	612.20	0.6
13	4.00	0	0.35	139.95	4.98	4.00	[2]	[2]	143.05	2.2
14	8.00	[1]	[1]	140.64	8.97	8.00	[2]	[2]	140.64	0.0
15	1.60	[2]	[2]	542.39	1.45	1.33	[2]	[2]	543.08	0.1
16	2.67	[2]	[2]	810.40	2.56	2.67	[2]	[2]	810.40	0.0
17	8.00	[1]	[1]	31.16	0.58	0.57	0.4	3.25	42.31	35.8
18	8.00	[1]	[1]	31.16	0.44	0.44	0.4	5.05	46.69	49.8
19	0.21	0.4	3.05	139.55	0.18	0.18	0.4	3.25	140.06	0.4
20	0.16	0.4	4.75	160.82	0.13	0.13	0.4	5.15	162.14	0.8
21	8.00	[1]	[1]	31.16	3.82	4.00	0	1.05	39.66	27.3
22	8.00	[1]	[1]	31.16	2.04	2.00	0.3	2.35	53.90	73.0
23	1.60	0	0.75	194.04	1.11	1.14	0	1.15	197.20	1.6
24	1.33	0.2	1.65	249.57	0.59	0.57	0.3	2.45	261.31	4.7
25	0.62	0.4	2.35	126.86	0.29	0.29	0.4	3.15	131.37	3.6
26	4.00	0	1.65	137.78	0.22	0.22	0.4	4.85	142.71	3.6
27	0.09	0.4	3.25	353.04	0.08	0.08	0.4	3.25	353.62	0.2
28	0.06	0.4	5.05	402.25	0.06	0.06	0.4	5.05	403.02	0.2
29	4.00	0	0.55	132.62	1.95	2.00	0	0.95	145.83	10.0
30	8.00	[1]	[1]	140.64	1.12	1.14	0.2	2.45	174.45	24.0
31	0.62	0	0.95	503.62	0.51	0.50	0	1.15	505.92	0.5
32	0.35	0.2	2.45	648.05	0.27	0.27	0.3	2.45	653.01	0.8

Note: [1]No monitoring is optimal ($h = T$). [2]Preventive maintenance is optimal ($n = 0$).

Case of unitary samples (n=1)

- 單一樣本短製程CUSUM與連續運作CUSUM的最佳參數沒有很大的不同，h_∞小於h。$n \leqq 1$，有很多情況不需要監控是最佳的。在h=T的情況下，h_∞<短製程T，這個現象指出連續運作CUSUM在n=1需要很多樣本來觀察可歸屬原因的發生，但在短製程或許可以不需要抽樣，因為從經濟觀點製程期間T可能不是為了要快速查出偏移。

Case of unitary samples (n=1)

- 如果發生可歸屬原因，在M, b很大和δ很小情況下，不進行抽樣，而是常常地搜尋可歸屬原因和修復製程到管制內才是最經濟的，此政策實質上是預防維護，選擇抽一個樣本的價值很小(b很大) ，但是如果沒有抽樣而使製程失控的成本會更大。

Case of unitary samples (n=1)

- 除了不需要統計管制為最佳以外，在懲罰成本和最小E(TC)，使用連續運作CUSUM監控短製程n=1(表5)相對高於n>1(表2)。雖然通常認為使用單一樣本CUSUM計劃有更好的整體統計表現(see, for example, Reynolds and Stoumbos 2004)， 我們調查結果顯示n=1的CUSUM計劃的經濟績效通常不如n>1 的CUSUM計劃。

Summary and conclusions

- 提出一個新機率模型，可以使用在短製程CUSUM計畫統計特性分析且決定其經濟最佳參數，並與連續運作最佳CUSUM計畫做比較，對其經濟有效性做評估。調查結果有下列2點：

(1)在短製程，可歸屬原因發生率很高，抽樣、搜尋和移除可歸屬原因相對製程失控成本來的高的情況下，使用CUSUM計畫是值得的。

(2)在短製程，不通過抽樣監控，而是讓製程沒有任何干擾或沒有抽樣下週期性的搜尋可歸屬原因，通常會有更好的經濟效益。