



An economic design of double sampling $\bar{X}$ charts for correlated data using genetic algorithms

出處：Expert Systems with Applications 36 (2009)
12621–12626

作者：Chau-Chen Torng *, Pei-Hsi Lee, Huang-Sheng
Liao, Nai-Yi Liao

報告者：鄭欣卉

指導老師：童超塵教授



Contents

- Introduction
- Background
- Average run length
- Economic design model
- Numerical example
- Sensitivity analysis
- Conclusion

Introduction

- Shewhart(1942)發展 $\bar{X}$ 管制圖，因其容易性被廣泛使用，但在小偏移製程，Costa(1994)修改Shewhart管制圖，發展變動抽樣(VSS) $\bar{X}$ 管制圖。
- Costa(1999); Reynolds, Amin, Arnold, & Nachlas(1988)提出變動抽樣間隔(VSI) $\bar{X}$ 管制圖、變動參數(VP) $\bar{X}$ 管制圖以改進偵測小偏移的敏感性。
- 在小偏移的製程監控，CUSUM和EWMA被證明有比較好的績效，但其監控過程太過複雜。

Introduction

- Daudin (1992)應用雙次抽樣的觀念計畫 Shewhart $\bar{x}$ 管制圖和採取二階 Shewhart $\bar{x}$ 管制圖來監控製程平均數，因此被稱為雙次抽樣 (DS) $\bar{x}$ 管制圖，DS成功的改善偵測小偏移的敏感性和減少樣本數(Daudin, 1992; He, Grigoryan, & Sigh, 2002)。
- Costa(1994)指出偵測小偏移，使用DS相對 VSS更經濟。當有較高的檢驗成本或破壞性試驗時，DS是一個很好的選擇。

Introduction

- 用管制圖監控製程，假設觀測值獨立且服從常態分配，如果違背假設，很容易錯誤判斷製程的狀態。
- Neuhardt (1987)指出製造工業的製程觀測值有可能違背獨立假設而具有相關性。
- Yang and Hancock (1990)探討相關性製程資料下Shewhart管制圖績效，發現當觀測值有高相關性時，有很高的假警報率，導致增加製程管制成本。

Introduction

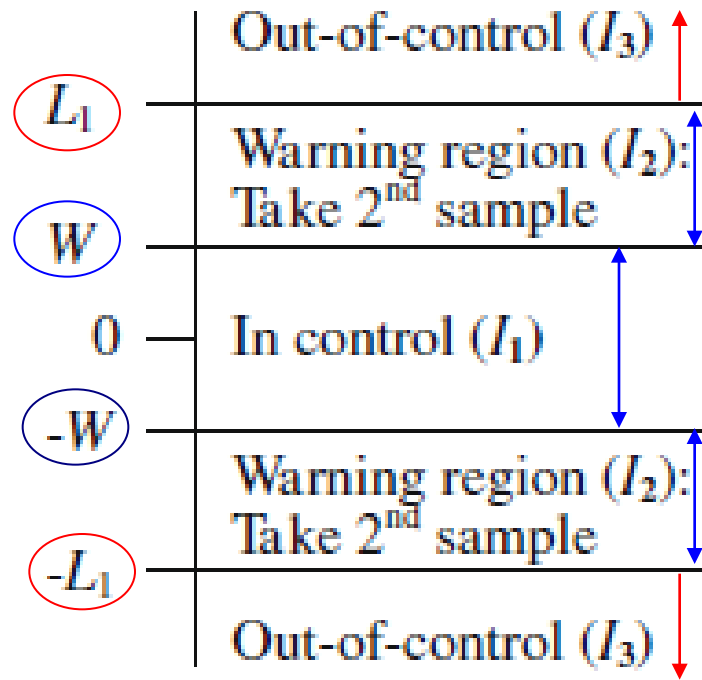
- Duncan(1956) 和 Lorenzen and Vance (1986) 提出管制圖經濟性設計成本模型。
- 後來很多學者(e.g., De Magalhaes, Epprecht, & Costa, 2001; ...)試圖修改Lorenzen and Vance (1986)模型來決定管制圖其他設計，以減少製程管制成本。
- 過去DS只有統計設計而沒有考慮成本，沒有減少DS製程管制成本。除此以外，目前為止相關性資料最佳設計還沒有被研究。

Introduction

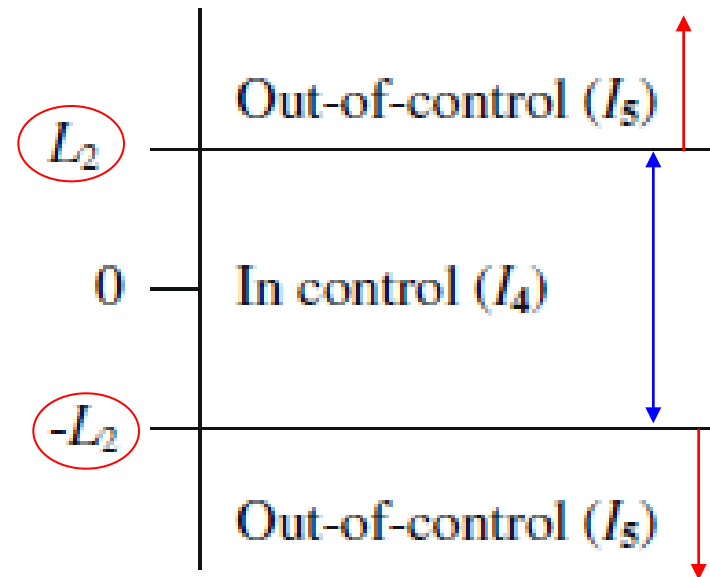
- 本研究從經濟觀點探討相關性製程資料DS設計和修改Lorenzen and Vance (1986)成本模型。
- Yang and Hancock (1990)相關性模型和常態分配假設皆包含在成本模型中。
- 使用GA決定最小化成本的DS參數。
- 利用敏感度分析成本模型參數對DS的影響。

Background - DS $\bar{X}$ control procedure

■ Graphic view of DS $\bar{X}$ control chart



1st stage



2nd stage

Background - Yang and Hancock's correlated model

- Yang and Hancock (1990) 假設每個子群組都是隨機向量， $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ ，服從 $N(\mu, V)$ 多變量常態分配， $\mu = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$ ， $V = \{V_{ij}\}$ ， $V = \sigma^2 R$ ， $R = \{r_{ij}\}$ ， $i, j = 1, 2, \dots, n$ 。根據以上假設， $\bar{X}$ 服從常態分配，其平均數和變異數如下：

$$E(\bar{X}) = \mu \quad (1)$$

and the variance is

$$V(\bar{X}) = \sigma^2 [1 + (n-1)\rho]/n \quad (2)$$

where

$$\rho = \frac{\sum_{i \neq j} r_{ij}}{n(n-1)} \quad (3)$$

Average run length

- μ_0 和 σ 為初始平均數和標準差，當可歸屬原因發生製程平均數偏移到 $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma$ 。
- 在特定 δ 時，樣本點落在管制外的機率 $P(\delta)$ 。
- $P(\delta = 0)$ 為假警報機率。
- $1 - P(\delta \neq 0)$ 為察覺製程變異的檢定力。
- $ARL(\delta) = 1/P(\delta)$ 。

Average run length

- 假設 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 且符合 Yang and Hancock (1990) 相關性模型的假設， Z_1 落在管制圖 I_1 的機率：

$$\begin{aligned} p(z_1 \in I_1^\delta) &= p\left[\frac{-W\sigma}{\sqrt{n_1}} \leq \bar{X}_1 - \mu_0 + \delta\sigma \leq \frac{W\sigma}{\sqrt{n_1}}\right] \\ &= p\left[\frac{-W - \delta\sqrt{n_1}}{\sqrt{1 + (n_1 - 1)\rho}} \leq \frac{\sqrt{n_1}(\bar{X}_1 - \mu_0)}{\sigma\sqrt{1 + (n_1 - 1)\rho}} \leq \frac{W - \delta\sqrt{n_1}}{\sqrt{1 + (n_1 - 1)\rho}}\right] \\ &= p\left(\frac{-W - \delta\sqrt{n_1}}{\sqrt{\eta_1}} \leq z_1 \leq \frac{W - \delta\sqrt{n_1}}{\sqrt{\eta_1}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{W - \delta\sqrt{n_1}}{\sqrt{\eta_1}}\right) - \Phi\left(\frac{-W - \delta\sqrt{n_1}}{\sqrt{\eta_1}}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

Average run length

- Z_1 落在管制圖 I_2 和 Z_2^* 落在 I_4 的機率：

$$p(z_1 \in I_2^\delta \cap z_2^* \in I_4^\delta) = \int_{\frac{W-\delta\sqrt{n_1}}{\sqrt{\eta_1}}}^{\frac{L_1-\delta\sqrt{n_1}}{\sqrt{\eta_1}}} \left[\Phi\left(L_2\sqrt{\frac{N}{\zeta_2}} - \frac{\delta N}{\sqrt{\zeta_2}} - z_1\sqrt{\frac{\zeta_1}{\zeta_2}}\right) - \Phi\left(-L_2\sqrt{\frac{N}{\zeta_2}} - \frac{\delta N}{\sqrt{\zeta_2}} - z_1\sqrt{\frac{\zeta_1}{\zeta_2}}\right) \right] \phi(z_1) dz_1 \\ + \int_{\frac{-L_1-\delta\sqrt{n_1}}{\sqrt{\eta_1}}}^{\frac{-W-\delta\sqrt{n_1}}{\sqrt{\eta_1}}} \left[\Phi\left(L_2\sqrt{\frac{N}{\zeta_2}} - \frac{\delta N}{\sqrt{\zeta_2}} - z_1\sqrt{\frac{\zeta_1}{\zeta_2}}\right) - \Phi\left(-L_2\sqrt{\frac{N}{\zeta_2}} - \frac{\delta N}{\sqrt{\zeta_2}} - z_1\sqrt{\frac{\zeta_1}{\zeta_2}}\right) \right] \phi(z_1) dz_1 \quad (6)$$

I_k^δ ：在特定 δ 區域 k 的範圍

$$N = n_1 + n_2, \quad \eta_1 = 1 + (n_1 - 1)\rho, \quad \zeta_1 = n_1[1 + (n_1 - 1)\rho],$$

$$\zeta_2 = n_2[1 + (n_2 - 1)\rho]$$

ϕ ：標準常態分配之PDF

Φ ：標準常態分配之CDF

Average run length

- 管制外的機率：

$$P(\delta) = 1 - [p(z_1 \in I_1^\delta) + p(z_1 \in I_2^\delta \cap z_2^* \in I_4^\delta)] \quad (7)$$

- 在 δ 落在警告區域 I_2 的機率：

$$\begin{aligned} p(z_1 \in I_2^\delta) \\ = \Phi\left(\frac{L_1 - \delta\sqrt{n_1}}{\sqrt{\eta_1}}\right) - \Phi\left(\frac{W - \delta\sqrt{n_1}}{\sqrt{\eta_1}}\right) + \Phi\left(\frac{-W - \delta\sqrt{n_1}}{\sqrt{\eta_1}}\right) \\ - \Phi\left(\frac{-L_1 - \delta\sqrt{n_1}}{\sqrt{\eta_1}}\right) \end{aligned} \quad (8)$$

- 在每次抽樣的期望樣本數：

$$E(N|\delta) = n_1 + n_2 p(z_1 \in I_2^\delta) \quad (9)$$

Average run length

- $E(N|\delta = 0)$ 製程在管制內的抽樣數
- $E(N|\delta \neq 0)$ 製程平均數偏移的抽樣數

Economic design model - Constructing a cost model

- 修改Lorenzen and Vance's (1986)模型以建造一個成本函數來決定DS的參數。
- 假設
 - (1)製程一開始在管制內，其時間 $\sim \text{Exp}(\lambda)$ ，製程平均數隨機偏移。
 - (2)樣本平均數落在管制外區域，則認為製程平均數偏移。
 - (3)尋找可歸屬原因時，製程中斷。
 - (4)兩個抽樣階段之間隔時間為0。

Economic design model - Constructing a cost model

■ DS之週期時間

偏移發生在 $(j+1)$ 次抽樣的區間

(1) 製程在管制內期間 $\sim \text{Exp}(\lambda)$ 。

(2) 製程在管制外期間為 $h \times \text{ARL}(\delta \neq 0) - \tau$ 。

(3) 抽樣與檢驗的期望時間為 $g \times E(N|\delta \neq 0)$ 。

(4) 假設尋找可歸屬原因的時間為 D 。

(5) 假設尋找假警報的時間為

$$T_0 e^{-\lambda h} / [\text{ARL}(\delta = 0) \times (1 - e^{-\lambda h})]$$

尋找假警報的時間

假警報個數

Economic design model - Constructing a cost model

- DS $\bar{X}$ 管制圖總生產週期 $E(T)$:

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} + h \times ARL(\delta \neq 0) - \tau + g \times E(N|\delta \neq 0) + D + \frac{T_0 e^{-\lambda h}}{ARL(\delta = 0) \times (1 - e^{-\lambda h})} \quad (10)$$

Economic design model - Constructing a cost model

■ DS五個成本要素

- (1) 管制內期望成本為 a_5 / λ 。
- (2) 管制外期望成本為 $a_4 [E(T) - 1/\lambda - D]$ 。
- (3) 假警報期望成本為 $a_5 e^{-\lambda h} / [ARL(\delta = 0) \times (1 - e^{-\lambda h})]$ 。
- (4) 尋找可歸屬原因的成本為 a_3 。
- (5) 抽樣、檢驗及繪點的成本為 ω 。

管制內每小
生產損失

管制外每小
生產損失

管制內期
望樣本數

調查假警
報成本

Economic design model - Constructing a cost model

- 抽樣、檢驗及繪點成本： a_1 固定成本、 a_2 變動成本。

- 管制內期望抽樣、檢驗及繪點成本為

$$[a_1 + a_2 E(N|\delta = 0)] e^{-\lambda h} / (1 - e^{-\lambda h})$$

管制內抽樣、檢驗及繪點成本

管制內期望抽樣數

- 管制外期望抽樣、檢驗及繪點成本為

$$[a_1 + a_2 E(N|\delta \neq 0)] \times ARL(\delta \neq 0)$$

管制外抽樣、檢驗及繪點成本

Economic design model - Constructing a cost model

- 總抽樣、檢驗及繪點成本：

$$\omega = \frac{[a_1 + a_2 E(N|\delta = 0)]e^{-\lambda h}}{(1 - e^{-\lambda h})} + [a_1 + a_2 E(N|\delta \neq 0)] \times \text{ARL}(\delta \neq 0) \quad (11)$$

- 總成本：

$$E(C) = \omega + \frac{a_5}{\lambda} + a_4[E(T) - 1/\lambda - D] + a_3 + \frac{a'_3 e^{-\lambda h}}{\text{ARL}(\delta = 0) \times (1 - e^{-\lambda h})} \quad (12)$$

- 單位小時期望成本：

$$E(A) = E(C)/E(T) \quad (13)$$

Economic design model - Constructing a cost model

■ DS經濟設計模型：

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & E(A) \\ \text{s.t.} \quad & \zeta_1, \zeta_2, \eta_1 > 0 \\ & n_2 \geq n_1 \geq 2 \\ & 0 < W < L_1 \leq L_{1u} \\ & L_2 > 0 \\ & h > 0 \\ & n_1, n_2 \in \text{Positive integer} \end{aligned} \tag{14}$$

Economic design model - Solution procedure

- 用GA來求DS經濟設計模型決策變數 n_1, n_2, L_1, W, L_2 和 h 的解。
- 滿足DS經濟設計模型限制的解為可行解，計算可行解期望成本 $E(A)$ ，越小的 $E(A)$ 有較好的適應值。
- 重複GA求解程序，所有可行解收斂於某個值的 $E(A)$ 為最佳DS設計。

Numerical example

- 以IC封裝之引腳電鍍製程說明相關性製程資料下DS經濟設計模型。
- 每個IC的外部引腳鍍上一層錫鉛，使其具有抗氧化與導電的特性，其厚度需適中。因此錫鉛厚度是監控電鍍製程關鍵品質特徵。
- 每個IC引腳所鍍上錫鉛的厚度值可能有相關性存在。
- 每個批量抽前5個IC來測量其電鍍厚度值，連續收集30個批量的數據。

Numerical example

■ 平均向量：

$$\mu = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5\} = \{515.1757, 523.618, 522.569, 526.2367, 520.9373\}$$

■ 共變異數矩陣：

$$V = \begin{bmatrix} 797.5815 & 493.9281 & 323.9697 & 331.6902 & 194.5263 \\ 493.9281 & 862.3107 & 352.2886 & 298.1792 & 450.3165 \\ 323.9697 & 352.2886 & 637.224 & 155.5044 & 42.40176 \\ 331.6902 & 298.1792 & 155.5044 & 974.9832 & 341.1086 \\ 194.5263 & 450.3165 & 42.40176 & 341.1086 & 948.2055 \end{bmatrix}$$

Numerical example

- $\rho = 0.3555$ 、 $\mu = 520.76$ 、 $\sigma = 29.32$
- $L_1 \leq 6$
- 使用GA解DS參數組合。
- 已知 $\lambda = 0.05$ ， $\sigma = 2$
- 假設 $a_1 = \$1$ ， $a_2 = \$0.1$ ， $a_3 = \$25$ ， $a_3' = \$50$ ， $a_4 = \$100$ ， $a_5 = \$10$ ， $g = 0.0167$ ， $T_0 = 0.3333$ ， $D = 1$

Numerical example

- DS經濟設計模型是一個非線性規劃，適合使用GA進行模式求解。
- Palisade (2001)開發Excel巨集套件，GA求解只要將數學模式建構在Excel表格裡。
- Chen et al. (2007)研究VSSI相關製程經濟設計，使用Evolver解VSSI參數，使用田口方法獲得GA最佳組合：母群體數75、交配率0.5、突變率0.25和演化世代4000。
- Chen et al. (2007)的成本模型與本研究非常相似，改編Evolver設定來解DS經濟設計模型。

Numerical example

- 使用Evolver4.0求解最佳DS設計結果：
 $n_1=3$ ， $n_2=4$ ， $L_1=4.6060$ ， $W=1.6361$ ，
 $L_2=3.9946$ 和 $h=0.71$
- 統計績效：
 $E(N|\delta=0)=3.84$ ， $E(N|\delta=2)=5.91$
 $ARL(\delta=0)=286.97$ ， $ARL(\delta=2)=1.26$
 $E(A)=15.56$

Sensitivity analysis

- Table 1 Effect of δ and ρ on optimal design of DS $\bar{x}$ control chart.

		n_1	n_2	L_1	W	L_2	h	$E(A)$
δ	3	2	3	4.24457	1.80836	4.26828	0.74	14.29
	2	3	4	4.60595	1.63611	3.99455	0.71	15.56
	1	5	6	5.19950	1.41851	3.54674	0.71	21.44
	0.5	6	7	4.94481	1.02168	2.91745	0.79	30.67
ρ	0.7	3	4	5.41704	1.78090	4.44020	0.67	16.64
	0.3	3	4	4.46123	1.58437	3.88223	0.74	15.39
	0	3	4	3.57636	1.51301	3.39612	0.76	14.59
	-0.3	2	3	5.99880	1.37339	2.83321	0.74	14.24
	-0.7	2	2	5.99694	1.60515	2.30191	0.95	13.49

Sensitivity analysis

- Table 2 Effect of model parameters on optimal design of DS

$\bar{X}$ control chart.

		n_1	n_2	L_1	W	L_2	h	$E(A)$
a_1	10	5	6	4.6399	1.0014	4.0208	2.29	21.32
	1	3	4	4.6060	1.6361	3.9946	0.71	15.56
	0.1	2	3	4.6673	1.8842	3.8788	0.30	13.83
a_2	1	2	3	3.8436	1.6172	3.1636	1.08	18.18
	0.1	3	4	4.6060	1.6361	3.9946	0.71	15.56
	0.01	2	3	4.1842	0.5259	3.6128	0.63	15.22
a_3	100	2	3	4.1851	1.2277	3.4901	0.70	19.09
	25	3	4	4.6060	1.6361	3.9946	0.71	15.56
	2.5	2	3	4.1851	1.2807	3.5099	0.67	14.60
a'_3	100	2	3	4.3599	1.3578	3.6685	0.65	15.87
	50	3	4	4.6060	1.6361	3.9946	0.71	15.56
	5	2	3	3.8715	1.1583	3.2454	0.70	15.29
a_4	200	2	3	4.1912	1.3394	3.5595	0.52	18.40
	100	3	4	4.6060	1.6361	3.9946	0.71	15.56
	10	2	3	5.9973	5.9755	5.9310	4.99	10.25
a_5	100	3	4	4.5446	1.4446	3.7801	4.08	97.27
	10	3	4	4.6060	1.6361	3.9946	0.71	15.56
	1	3	4	4.5804	1.5421	3.9421	0.75	7.26
λ	0.5	3	4	4.1707	1.7515	3.8990	0.26	26.79
	0.05	3	4	4.6060	1.6361	3.9946	0.71	15.56
	0.005	3	4	4.8392	1.5814	3.9849	2.24	11.61
T_0	3	3	4	5.0911	1.7324	4.4076	0.72	16.14
	0.333	3	4	4.6060	1.6361	3.9946	0.71	15.56
	0.03	3	4	4.4437	1.5747	3.8382	0.74	15.42
g	0.1	2	3	3.7025	1.5763	3.5278	0.65	16.95
	0.0167	3	4	4.6060	1.6361	3.9946	0.71	15.56
	0.001	2	4	4.3413	1.3405	3.7979	0.65	15.31
D	10	3	4	4.6258	1.6590	3.9977	0.68	10.99
	1	3	4	4.6060	1.6361	3.9946	0.71	15.56
	0.1	3	4	4.5685	1.5994	3.9484	0.74	16.23



Conclusion

- 基於DS管制程序修改Lorenzen and Vance (1986)之成本模式為經濟設計模式目標函數來求解最佳DS參數，使用Yang and Hancock (1990)相關模式來計算DS的ARL。
- 以IC封裝引腳電鍍來說明經濟設計模型的應用和測定結果。
- 敏感度分析得知，在監控小偏移或樣本觀測值有高的正相關時，DS有較高的期望成本。
- 減少 ρ 、抽樣和檢驗時間、發生可歸屬原因所導致的成本，可以有效減少總成本。