



國立雲林科技大學工業工程與管理所
Graduate school of Industrial Engineering & Management,
National Yunlin University of Science & Technology

系統可靠度實驗室 System Reliability Lab.
<http://campusweb.yuntech.edu.tw/~qre/index.htm>

A Cumulative Sum Scheme for Monitoring Frequency and Size of an Event



出處：Quality and Reliability Engineering International
DOI:10.1002/qre.1076

作者：ZhangWu,^{a*†} Yafen Liu,^b Zhen He^b and Michael B. C.
Khoo^c

報告者：鄭欣卉

指導老師：童超塵教授



Contents

- Introduction
- Implementation of the TC-CUSUM scheme
- Design of the TC-CUSUM scheme
- Comparative studies
- Example
- Conclusions

Introduction

- 事件發生將導致消極、危害或災害的後果，可能是系統故障或交通事故，或拒收產品。
- 在統計製程管制(SPC)通常對觀察T下降和C增加感興趣。
- 事件大小C是事件發生產生的項目數量，其決定了事件的嚴重性，假設C為離散隨機數。
- SPC監控計畫協助事件決策達到減少誤差的成本和損失：(1)假警報導致不必要的資源浪費；(2)當失控的情況下必須做決策且立即行動延遲了。

Introduction

- 目前已經發展很多管制圖來監控事件T，包括T管制圖或指數管制圖、Gamma管制圖、指數CUSUM管制圖、指數EWMA管制圖。然而實際上T的偏移通常伴隨著C的偏移。
- 管制圖只檢查T偏移沒辦法得到充分的敏感度，因為其完全忽略C的資訊。
- 在SPC文獻中，已經進行同時監控T和C的演算法研究。其中修華特T&X計畫同時運作T管制圖 LCL_T 和X管制圖 UCL_X 。X管制圖用來監控事件大小X，其為連續變數。

Introduction

- CUSUM管制圖藉由監控統計量累積和，合併抽樣點所有資訊，從整體上來看，比起修華特型態管制圖更有效。
- 這篇研究CUSUM管制圖，同時監控事件的T和C，即TC-CUSUM管制圖，其中T為變數和C為屬性。此外，T和C假設為互相獨立。使用二維馬可夫模型來衡量TC-CUSUM計畫的Average Time to Signal(ATS)。

Implementation of the TC-CUSUM scheme

- 更新T-CUSUM的累積和 CT_t

$$CT_0 = 0$$

$$CT_t = \max(0, CT_{t-1} + k_T - T_t)$$

- 更新C-CUSUM的累積和 CC_t

$$CC_0 = 0$$

$$CC_t = \max(0, CC_{t-1} + C_t - k_C)$$

- T_t 和 C_t ：(t)th時間間隔 T 和事件大小 C 的樣本值

Implementation of the TC-CUSUM scheme

■ 執行TC-CUSUM：

- (1) 察覺事件發生，找出時間間隔 T 和計算大小 C
- (2) 更新 CT_t 和 CC_t
- (3) 如果 $CT_t \leq h_t$ 和 $CC_t \leq h_c$ 製程為管制內，則回到step1等待下次事件發生
- (4) 否則($CT_t > h_t$ 和 $CC_t > h_c$)製程為管制外， T 減少和 C 增加。TC-CUSUM產生失控訊號，立即停止製程進行調查。



Design of the TC-CUSUM scheme

- Design specifications
- Design objective
- Design procedure

Design of the TC-CUSUM scheme — Design specifications

■ 需決定以下三種規格：

- ATS_0 允許的最小值 τ 。
- T 機率分佈管制內參數值。假設 $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ ，可以用 T 的管制內抽樣平均來估計 λ_0 。
- C 機率分佈管制內參數值。假設 $C \sim \text{Poisson}(g)$ 。使用管制內製程收集來的歷史數據估計 g_0 。

Design of the TC-CUSUM scheme — Design objective

- 整體績效的比較：在感興趣的範圍中的某個製程偏移點，比較兩管制圖的 ATS_1 ，如果有一個圖有較多點較小的 ATS_1 或小於的程度很大，認為這圖比其他圖更有效。這種情況的比較， ATS_1 公式化為Average Ratios (**AR**)：

$$AR = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{ATS(\delta_{g,i}, \delta_{\lambda,i})}{ATS_{bench}(\delta_{g,i}, \delta_{\lambda,i})}}{m}$$

- 顯然地，如果圖的AR值超過1，這個管制圖通常比起基準管制圖沒效率。

Design of the TC-CUSUM scheme — Design objective

- 以管制圖整體績效來衡量平均損失 **AL**。C和T的比值R反映事件產生損失的比率。

$$E(R) = E(C/T) = \sum_{C=0}^{\infty} \left\{ \left[\int_0^{\infty} \frac{C}{T} f_T(T) \cdot dT \right] \cdot p_C(C) \right\} = \sum_{C=0}^{\infty} \left\{ \left[\int_0^{\infty} \frac{C}{T} \cdot \lambda e^{-\lambda T} \cdot dT \right] \cdot \frac{e^{-g} g^C}{C!} \right\} = \lambda g \cdot \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda T}}{T} \cdot dT$$

- E(R)代表單位時間損失，管制外產生的總損失等於E(R) × ATS。如果在一個偏移範圍將考慮所有不同的 δ_λ 和 δ_g 組合，其平均損失AL為：

$$AL = \frac{\sum_{i=1}^m (E(R(\delta_{g,i}, \delta_{\lambda,i})) \cdot ATS(\delta_{g,i}, \delta_{\lambda,i}))}{m}$$

Design of the TC-CUSUM scheme — Design objective

- AL相較於AR有兩點優勢：
 - AL為全面性衡量管制圖績效，因為它考慮所有關於損失的因素(包 ATS , δ_λ , and δ_g)。
 - AL的計算不需要事先決定基準圖。
- 因此將用AL來做為TC-CUSUM計畫的設計目標函數。最小化AL將會直接減少管制外導致的損失或成本。

Design of the TC-CUSUM scheme — Design procedure

- 定義T和C偏移範圍 $1 \leq \delta_\lambda \leq \delta_{\lambda, \max}$, $1 \leq \delta_g \leq \delta_{g, \max}$
- TC-CUSUM設計透過分配因子 θ 以分配T-和C-CUSUM管制圖檢測能力，由因子 θ 決定。

$$\tau_T = \tau / \theta$$

$$\tau_C = \tau / (1 - \theta)$$

- 如果T-和C-SUSUM管制內的 $ATS_{0,T}$ 和 $ATS_{0,C}$ 等於 τ_T 和 τ_C ，整體TC-CUSUM的 ATS_0 近似等於

$$\tau \quad \circ \quad ATS_0 \approx \frac{1}{\frac{1}{ATS_{0,T}} + \frac{1}{ATS_{0,C}}} = \frac{1}{\frac{1}{\tau_T} + \frac{1}{\tau_C}} = \frac{1}{\frac{\theta}{\tau} + \frac{1-\theta}{\tau}} = \tau$$

Design of the TC-CUSUM scheme — Design procedure

Table I. ATS values of four control charts							
δ_λ	Chart	δ_g					
		1.00	1.76	2.52	3.29	4.05	4.81
6.00	T	301.4	301.4	301.4	301.4	301.4	301.4
	T&C	385.6	123.5	37.6	21.8	17.9	16.9
	T-CUSUM	89.3	89.3	89.3	89.3	89.3	89.3
	TC-CUSUM	100.4	66.0	35.6	25.0	20.1	17.8
5.00	T	428.0	428.0	428.0	428.0	428.0	428.0
	T&C	543.0	154.1	45.4	26.2	21.5	20.3
	T-CUSUM	114.0	114.0	114.0	114.0	114.0	114.0
	TC-CUSUM	128.1	80.6	42.7	30.0	24.1	21.3
4.00	T	659.3	659.3	659.3	659.3	659.3	659.3
	T&C	824.6	200.9	57.0	32.8	26.9	25.4
	T-CUSUM	157.6	157.6	157.6	157.6	157.6	157.6
	TC-CUSUM	177.1	103.1	53.5	37.6	30.1	26.7
3.00	T	1155.5	1155.5	1155.5	1155.5	1155.5	1155.5
	T&C	1408.6	280.0	76.4	43.7	35.9	33.9
	T-CUSUM	254.7	254.7	254.7	254.7	254.7	254.7
	TC-CUSUM	286.8	141.9	71.4	50.1	40.1	35.6
2.00	T	2562.3	2562.3	2562.3	2562.3	2562.3	2562.3
	T&C	2964.0	440.5	115.2	65.6	53.8	50.8
	T-CUSUM	625.6	625.6	625.6	625.6	625.6	625.6
	TC-CUSUM	713.4	221.3	107.3	75.2	60.2	53.3
1.00	T	10000.0	10000.0	10000.0	10000.0	10000.0	10000.0
	T&C	10000.0	921.2	230.6	131.1	107.6	101.6
	T-CUSUM	9999.3	9399.4	9399.4	9399.4	9399.4	9399.4
	TC-CUSUM	9944.3	449.6	214.0	150.0	120.3	106.7

Design of the TC-CUSUM scheme — Design procedure

■ 整個TC-CUSUM設計過程如下：

- (0) 決定三種規格：允許 ATS_0 的最小值(τ)、T分配參數值(λ_0)、C平均值(g_0)。
- (1) 變數 $AL_{\min}$ 初始值當作最大數值， $AL_{\min}$ 被用來儲存AL最小值。
- (2) 在($0 < \theta < 1$)範圍找出最小化目標函數AL的最佳 θ 。
- (3) 最後在滿足最小化TC-CUSUM的AL和 $ATS_0 = \tau$ 的條件下，搜尋最佳 θ 。最終得到最佳 k_T 、 k_c 、 h_T 、 h_c 。

Comparative studies

- T chart : T減少為偏移 , $LCL_T = -\frac{\ln(1-\alpha)}{\lambda_0}$,
$$\alpha = \frac{1}{\lambda_0 \cdot \tau}$$

- T&C chart : T減少為偏移和C增加為偏移 ,
$$LCL_T = -\frac{\ln(1-\alpha_T)}{\lambda_0} \text{ 、 } UCL_C = F_C^{-1}(1-\alpha_C) \text{ , } \alpha_C = \theta\alpha \text{ 、 } \alpha_T = \frac{\alpha(1-\theta)}{1-\theta\alpha}$$

- T-CUSUM chart : 監控T, AL最小化和 $ATS_0 = \tau$ 決定最佳 k_T 和 h_T 。研究發現其只對T偏移具有敏感性。

Comparative studies

■ TC-CUSUM :

- 在 $\tau=10000$, $\lambda_0=0.01$, $g_0=4$ 條件下研究其績效。
- $1 \leq \delta_\lambda \leq 6$, $1 \leq \delta_g \leq 4.81$
- 四個管制圖參數：

T chart: $LCL_T = 1.0050$

T&C chart: $LCL_T = 0.7207$, $UCL_C = 10$

T-CUSUM chart: $k_T = 64.1667$, $h_T = 219.5547$

TC-CUSUM scheme: $k_T = 64.2600$, $h_T = 254.5791$, $k_C = 4.8875$, $h_C = 8.9951$

Comparative studies

■ 觀察Table 1得到：

- 當製程在管制內，四個管制圖有相似的 ATS_0 非常接近 τ 。
- T chart 是最沒有效率的。ATS在同列其值相同，表示其對C偏移完全不敏感。
- 除了單純T偏移之外，T&C chart比起T chart來的好。其檢測績效的改善可歸因於T&C chart 聯合監控T和C。
- T-CUSUM chart 顯著優於T chart，其意指CUSUM可以有效地提升其檢測能力。但是T chart & T-CUSUM chart 忽略C偏移，因此其在C偏移存在時是沒有效率的。

Comparative studies

■ 觀察Table 1得到(續)：

- TC-CUSUM不僅有T和C偏移檢測能力，而且其包含所有抽樣點資訊，因此在不同型態和程度的偏移，其有相當好的檢查能力。即使針對檢察單純的T偏移，TC-CUSUM有壓倒性的優勢優於T chart。

雖然TC-CUSUM在檢查大的C偏移沒有T&C chart 來的有效，但本質上在其他情況下它仍有很高的效率。除了針對單純T偏移以外，TC-CUSUM chart 相對 T-CUSUM chart 有更好的檢測能力。

Comparative studies

- 為了達到全面性的績效比較，在Table 1的整體偏移範圍，四個圖的AR和AL計算為Run 0。AR值的計算是以TC-CUSUM為基準，三個範圍的AR計算：
 - Region 1 ($\delta_\lambda = 1$ and $\delta_g > 1$) : $AR_C(m=5)$
 - Region 2 ($\delta_\lambda > 1$ and $\delta_g = 1$) : $AR_T(m=5)$
 - Region 3 ($\delta_\lambda > 1$ and $\delta_g > 1$) : $AR_{T+C}(m=25)$

Comparative studies

RUN	τ	λ_0	g_0	Chart	AR_C	AR_T	AR_{T+C}	AR	AL	AL/AL _{TC-CUSUM}
0	10 000	0.010	4	T	62.498	3.537	19.045	23.037	1243.23	21.4278
				T&C	1.169	4.360	1.145	1.608	107.69	1.8561
				T-CUSUM	58.745	0.887	4.708	11.882	659.75	11.3711
				TC-CUSUM	1.000	1.000	1.000	1.000	58.02	1.000
1	5000	0.003	2	T	11.095	1.253	4.237	4.790	131.64	4.9653
				T&C	0.970	2.287	0.982	1.166	30.42	1.1473
				T-CUSUM	9.450	0.880	2.929	3.568	98.09	3.6997
				TC-CUSUM	1.000	1.000	1.000	1.000	26.51	1.000
2	5000	0.003	8	T	14.063	1.220	5.333	5.992	526.57	6.0700
				T&C	1.044	1.388	1.040	1.090	94.58	1.0902
				T-CUSUM	11.978	0.857	3.684	4.465	392.35	4.5228
				TC-CUSUM	1.000	1.000	1.000	1.000	86.75	1.000
3	5000	0.030	2	T	47.930	4.354	14.796	18.038	625.26	17.9936
				T&C	1.392	8.335	1.552	2.498	92.18	2.6527
				T-CUSUM	45.620	0.827	2.776	8.618	329.40	9.4794
				TC-CUSUM	1.000	1.000	1.000	1.000	34.75	1.000
4	5000	0.030	8	T	91.421	4.356	27.382	33.241	2501.06	29.7129
				T&C	1.290	5.199	1.235	1.809	201.70	2.3962
				T-CUSUM	87.014	0.827	5.134	16.216	1317.60	15.6533
				TC-CUSUM	1.000	1.000	1.000	1.000	84.17	1.000
5	20 000	0.003	2	T	36.248	2.485	11.457	13.717	465.98	13.2332
				T&C	1.269	3.005	1.243	1.499	55.44	1.5743
				T-CUSUM	33.225	0.868	3.927	7.676	262.99	7.4684
				TC-CUSUM	1.000	1.000	1.000	1.000	35.21	1.000
6	20 000	0.003	8	T	53.096	2.559	16.594	19.804	1863.94	18.7272
				T&C	1.076	2.979	1.068	1.342	149.04	1.4974
				T-CUSUM	48.668	0.894	5.686	11.141	1051.94	10.5690
				TC-CUSUM	1.000	1.000	1.000	1.000	99.53	1.000
7	20 000	0.030	2	T	145.060	12.821	43.788	53.831	2471.26	52.6760
				T&C	2.083	24.309	2.492	5.550	279.62	5.9602
				T-CUSUM	142.175	0.858	2.931	22.527	1181.12	25.1761
				TC-CUSUM	1.000	1.000	1.000	1.000	46.91	1.000
8	20 000	0.030	8	T	290.222	11.873	84.904	103.802	9885.03	88.0362
				T&C	1.926	13.290	1.807	3.464	608.24	5.4170
				T-CUSUM	284.450	0.794	5.683	44.808	4724.47	42.0762
				TC-CUSUM	1.000	1.000	1.000	1.000	112.28	1.000
					$\overline{AR}_C$	$\overline{AR}_T$	$\overline{AR}_{T+C}$	$\overline{AR}$	$\overline{AL}$	$\overline{AL}/\overline{AL}_{TC-CUSUM}$
T					83.515	4.940	25.282	30.695	2190.44	28.094
T&C					1.358	7.239	1.396	2.225	179.88	2.621
T-CUSUM					80.147	0.855	4.162	14.545	1113.08	14.446
TC-CUSUM					1.000	1.000	1.000	1.000	64.90	1.000

■ 從Run 0中發現大部分 AR_C 、 AR_T 、 AR_{T+C} 皆大於1，表示大部分TC-CUSUM勝過其他管制圖。

■ 根據AR和AL發現TC-CUSUM顯著優於其他管制圖。

■ Run 0中的 $AL/AL_{TC-CUSUM}$ 指出TC-CUSUM比起T chart、T&C chart、T-CUSUM chart有效。

■ 當 τ 和 λ_0 很大時，TC-CUSUM顯著優於其他管制圖。 g_0 的影響很微小。



Design of the TC-CUSUM scheme — Design procedure

Table I. ATS values of four control charts							
δ_λ	Chart	δ_g					
		1.00	1.76	2.52	3.29	4.05	4.81
6.00	T	301.4	301.4	301.4	301.4	301.4	301.4
	T&C	385.6	123.5	37.6	21.8	17.9	16.9
	T-CUSUM	89.3	89.3	89.3	89.3	89.3	89.3
	TC-CUSUM	100.4	66.0	35.6	25.0	20.1	17.8
5.00	T	428.0	428.0	428.0	428.0	428.0	428.0
	T&C	543.0	154.1	45.4	26.2	21.5	20.3
	T-CUSUM	114.0	114.0	114.0	114.0	114.0	114.0
	TC-CUSUM	128.1	80.6	42.7	30.0	24.1	21.3
4.00	T	659.3	659.3	659.3	659.3	659.3	659.3
	T&C	824.6	200.9	57.0	32.8	26.9	25.4
	T-CUSUM	157.6	157.6	157.6	157.6	157.6	157.6
	TC-CUSUM	177.1	103.1	53.5	37.6	30.1	26.7
3.00	T	1155.5	1155.5	1155.5	1155.5	1155.5	1155.5
	T&C	1408.6	280.0	76.4	43.7	35.9	33.9
	T-CUSUM	254.7	254.7	254.7	254.7	254.7	254.7
	TC-CUSUM	286.8	141.9	71.4	50.1	40.1	35.6
2.00	T	2562.3	2562.3	2562.3	2562.3	2562.3	2562.3
	T&C	2964.0	440.5	115.2	65.6	53.8	50.8
	T-CUSUM	625.6	625.6	625.6	625.6	625.6	625.6
	TC-CUSUM	713.4	221.3	107.3	75.2	60.2	53.3
1.00	T	10000.0	10000.0	10000.0	10000.0	10000.0	10000.0
	T&C	10000.0	921.2	230.6	131.1	107.6	101.6
	T-CUSUM	9999.3	9399.4	9399.4	9399.4	9399.4	9399.4
	TC-CUSUM	9944.3	449.6	214.0	150.0	120.3	106.7

Comparative studies

Table III. Charting parameters of the four control charts										
RUN	τ	λ_0	g_0	Chart	LCL_T	UCL_C	k_T	h_T	k_C	h_C
0	10 000	0.010	4	T	1.0050					
				T&C	0.7207	10.0000				
				T-CUSUM			64.1667	219.5547		
				TC-CUSUM			64.2600	254.5791	4.8875	8.9951
1	5000	0.003	2	T	22.9976					
				T&C	4.9677	4.0000				
				T-CUSUM			245.0000	434.7077		
				TC-CUSUM			233.3333	535.7133	2.6688	2.8430
2	5000	0.003	8	T	22.9976					
				T&C	17.1951	14.0000				
				T-CUSUM			245.0000	434.7077		
				TC-CUSUM			233.3333	561.9553	10.6750	3.2935
3	5000	0.030	2	T	0.2230					
				T&C	0.0715	6.0000				
				T-CUSUM			21.3889	82.8460		
				TC-CUSUM			20.9611	100.0240	2.5117	7.4327
4	5000	0.030	8	T	0.2230					
				T&C	0.1698	17.0000				
				T-CUSUM			21.3889	82.8460		
				TC-CUSUM			21.3803	103.4928	8.9770	14.1851
5	20 000	0.003	2	T	5.6024					
				T&C	4.0877	6.0000				
				T-CUSUM			221.6667	666.4162		
				TC-CUSUM			210.0000	737.8342	2.6688	4.9945
6	20 000	0.003	8	T	5.6024					
				T&C	4.3607	16.0000				
				T-CUSUM			221.6667	666.4162		
				TC-CUSUM			214.2000	731.2887	10.6750	6.3017
7	20 000	0.030	2	T	0.0556					
				T&C	0.0190	7.0000				
				T-CUSUM			21.0000	111.7810		
				TC-CUSUM			21.0000	133.4679	2.5464	10.1149
8	20 000	0.030	8	T	0.0556					
				T&C	0.0472	19.0000				
				T-CUSUM			21.0000	111.7810		
				TC-CUSUM			21.0000	140.6948	8.9770	19.6748



Comparative studies

- 最終計算 $\overline{AR}$ 、 $\overline{AL}$ 、 $\overline{AL / AL_{TC-CUSUM}}$
- $\overline{AL / AL_{TC-CUSUM}}$ 指出，從綜合的觀點來看，TC-CUSUM 比起 T chart、T&C chart 和 T-CUSUM 更為有效。
- TC-CUSUM 展現一個獨特的強勢，達到有效檢測 T 和 C 偏移和聯合偏移。它的績效滿足整體偏移的範圍。
 - T-CUSUM 只有針對 T 偏移有效但對 C 偏移則不敏感。
 - T&C chart 只對 C 偏移較具檢測能力但對 T 偏移相當不敏感。

Example

- 市政府要發展一個SPC工具來監控災難性事故的發生，可以協助何時需要盡快加強採取行動，記錄某段期間25個意外發生的 t_i 和 c_i ，其服從常態分配(在管制內)，發現 $T \sim \text{Exp}$ 和 $C \sim \text{Poisson}$ ，其管制內參數估計下：

$$g_0 \approx \bar{C} = \frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_{25}}{25} = 4.0400$$

$$\lambda_0 \approx \frac{1}{\bar{T}} = \frac{1}{(t_1 + t_2 + \cdots + t_{25})/25} = 0.0112$$

- λ_0 指每89.3h(3.72天)有一個意外發生， $\tau = 8760\text{h}$ (1年)。市政府主要關心的是意外發生頻率和每次意外的死亡人數、 C/T 的比率、損失的增加警告。

Example

Table IV. Sample data of T and C in the example

No.	t_i (h)	c_i (death toll)
1	51.2	2
2	42.9	1
3	85.1	5
4	61.0	6
5	0.5	5
6	22.1	7
7	105.3	5
8	35.1	5
9	130.2	2
10	248.0	4
11	14.3	6
12	305.4	5
13	123.6	3
14	45.1	2
15	68.3	1
16	6.0	2
17	77.6	5
18	25.1	6
19	207.1	6
20	244.6	4
21	20.8	1
22	90.5	2
23	96.5	5
24	61.6	6
25	54.5	5

Example

- 前面提及的四個管制圖其參數如下：

T chart: $LCL_T = 0.9067$

T&C chart: $LCL_T = 0.6345$, $UCL_C = 10$

T-CUSUM chart: $k_T = 57.0415$, $h_T = 194.2477$

TC-CUSUM scheme: $k_T = 56.0044$, $h_T = 225.3478$, $k_C = 4.8606$, $h_C = 8.8424$

- 四個管制圖的績效比較與前章節的結論相似，從整體觀點來看TC-CUSUM比起其他管制圖顯著更有效率。

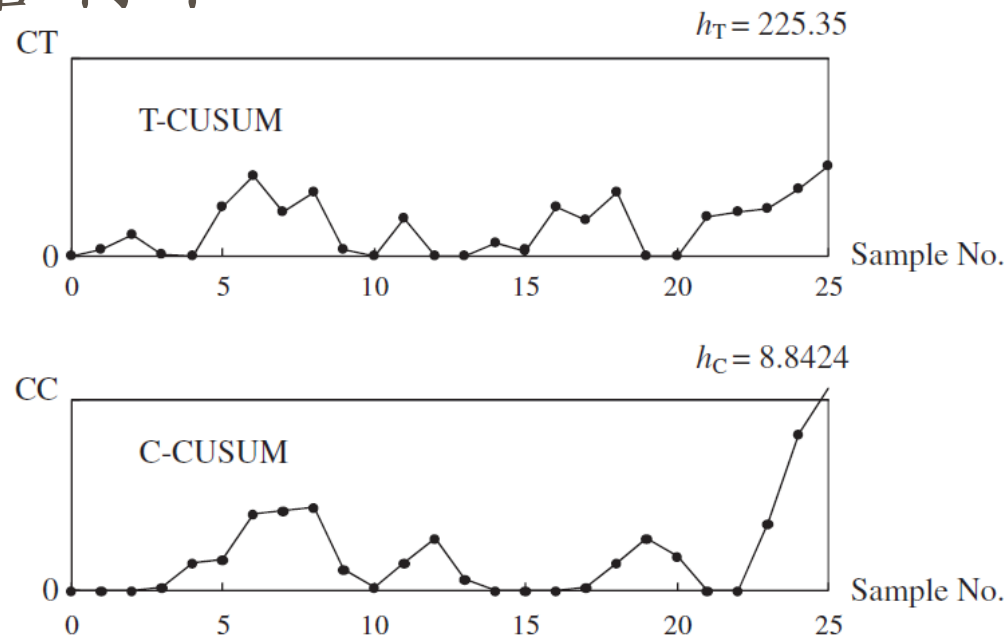
Example

Table V. ATS values of the four control charts in the example

δ_2	Chart	δ_g					
		1.00	1.74	2.48	3.21	3.95	4.69
6.00	T	264.3	264.3	264.3	264.3	264.3	264.3
	T&C	344.1	111.7	34.4	19.8	16.1	15.1
	T-CUSUM	79.0	79.0	79.0	79.0	79.0	79.0
	TC-CUSUM	90.9	59.3	32.0	22.5	18.0	15.9
5.00	T	375.3	375.3	375.3	375.3	375.3	375.3
	T&C	484.1	139.5	41.5	23.7	19.3	18.1
	T-CUSUM	100.9	100.9	100.9	100.9	100.9	100.9
	TC-CUSUM	116.2	72.4	38.4	27.0	21.6	19.1
4.00	T	578.0	578.0	578.0	578.0	578.0	578.0
	T&C	734.2	181.9	52.1	29.7	24.1	22.7
	T-CUSUM	139.5	139.5	139.5	139.5	139.5	139.5
	TC-CUSUM	161.2	92.7	48.1	33.8	27.1	23.9
3.00	T	1012.8	1012.8	1012.8	1012.8	1012.8	1012.8
	T&C	1251.4	253.8	69.9	39.6	32.2	30.2
	T-CUSUM	225.5	225.5	225.5	225.5	225.5	225.5
	TC-CUSUM	262.6	127.6	64.2	45.1	36.1	31.8
2.00	T	2245.4	2245.4	2245.4	2245.4	2245.4	2245.4
	T&C	2622.5	399.5	105.4	59.5	48.2	45.3
	T-CUSUM	553.3	553.3	553.3	553.3	553.3	553.3
	TC-CUSUM	664.2	198.7	96.5	67.6	54.1	47.8
1.00	T	8760.0	8760.0	8760.0	8760.0	8760.0	8760.0
	T&C	8760.0	836.2	211.2	118.8	96.4	90.6
	T-CUSUM	8756.8	8227.4	8227.4	8227.4	8227.4	8227.4
	TC-CUSUM	8780.6	403.5	192.5	135.0	108.2	95.5

Example

- 聯合偏移 ($\delta_\lambda = 1.7$, $\delta_g = 1.6$) 發生在第20和21個樣本，隨後兩管制圖的樣本點增加且漂離0。最後C-CUSUM chart 第25個樣本點超出 h_c ，指出其處於管制外。



Conclusions

- 這篇研究提出TC-CUSUM同時監控災難性事件的頻率和大小，研究其設計、操作和績效評估，其顯著優於其他SPC管制圖。
- TC-CUSUM優勢：
 - 有高的檢測效率是因為它能夠利用一切現有資料，包括(1)T和C；(2)先前一系列抽樣點的資訊或事件歷史資料。
 - 它對T和C偏移皆敏感。
- 發展了二維馬可夫模型來評估TC-CUSUM的ATS，提出AL作為整體事件監控績效衡量指標和管制圖設計的目標函數。

Conclusions

- 本篇研究假設 $T \sim \text{Exp}$ 和 $C \sim \text{Poisson}$ (包括截尾Poisson)
 - 未來研究 T 和 C 服從其他機率分配或 C 為連續變數，或 T 和 C 彼此相依。
- 如果難以確定合適的理論分配，可以根據現有資料使用非參數方法評估PDF和CDF。所有這些方法，是因為TC-CUSUM有高績效，而不是因為其有特定機率分布，所以預計TC-CUSUM能有良好的運作。

參考文獻

- Wu Z, Jiao JX, He Z. A control scheme for monitoring the frequency and magnitude of an event. *International Journal of Production Research* 2009; **47:2887--2902.**
- Wu Z, Jiao JX, He Z. A single control chart for monitoring the frequency and magnitude of an event. *International Journal of Production Economics* 2009; **119:24--33.**

A single control chart for monitoring the frequency and magnitude of an event

- $T \sim \text{Exp}(\lambda)$
- $X \sim \text{gamma}(a_0, b_0)$
- $R = X/T$
 - UCL_r
 - LCL_r
- 缺點：
 - 無法立即指出何者有變動。
 - 兩者同時增加，R值不變。