



# Robustness of the time between events CUSUM

出 處：INT. J. PROD. RES., 2003, VOL. 41, NO. 15, 3435–3444

作 者：CONNIE M. BORROR, J. BERT KEATS and  
DOUGLAS C. MONTGOMERY\*

報 告 者：鄭欣卉

指 導 老 師：童超塵教授



# Contents

- Introduction
- Defects per million
- TBE CUSUM
- Example
- Robustness study
- Conclusions

# Introduction

- Lucas 1985使用CUSUM來監控 time between events (TBE)。
- 除了使用時間尺度來衡量，更期望不良品發生間隔時間越長越好。也可以使用不良單位間的良好單位數量來衡量，期望其良好單位越多越好。
- Chan et al.(2000)提出 cumulative quantity control chart(CCC)。
- 使用監控計畫定義製程偏移：可接受平均不良率  $\mu_a$ 、不可接受平均不良率  $\mu_d$ 。

# Introduction

- PPM : defects are at the parts per million level  
DPMU : defects per million units  
DPMO : defects per million opportunities
- DPMU和DPMO與生產率有直接的關係，其差異在於ARLs的不同。EX：如果DPMU之ARL為100，則DPMO之ARL為1000較適當。
- 無論DPMU或DPMO，期望能夠盡早察覺製程偏移。

# Introduction

- 這篇提出非指數分配TBE CUSUM穩健性的研究，針對Weibull和lognormal分配來進行探討，因為有些情況其形態和結構與指數分配相似。

# Defects per million

- 檢查DPMU或DPMO增加 = 檢察不良單位間的良品單位數目減少。
- 當一個製程生產一單位將產生一個不良品(有一個機會產生不良品)，在這種情況下進行監控defects per unit (DPU)，因此 $DPMU = DPU \times 10^6$ 。
- 當一個生產單位有很多機會產生不良品，將使用DPMO。

# Defects per million

- 無論DPMU或DPMO，這篇研究將進行TBE CUSUM的穩健性研究。
- 對於DPMU，假設ARL近似100，則對於DPMO，其 $ARL=1000$ 。
- 這個ARL設定結果是與眾多工業合作夥伴一起協商討論的結果。

# TBE CUSUM

- TBE CUSUM用來檢查不良率增加

$$S_i = \max(0, k - y_i + S_{i-1})$$

- 根據Lucas (1985) :  $k = \frac{k_t}{\mu_a}$ 、 $k_t = \frac{\ln(\mu_a/\mu_d)}{(\mu_a/\mu_d) - 1}$

- $y_i \sim \text{Geometric}$ ，設計TBE CUSUM使用Exponential近似Geometric，研究發現這樣的近似在我們研究的情境下是可以滿足的，因為

- 指數和幾何分配皆具有遺失記憶性。
- 當PPM很小時不良率很小。

# TBE CUSUM

- TBE CUSUM 上管制界線： $h = (h_t / \mu_a)$
- $h_t$  可以根據製程的知識或根據Lucas(1985)提供的表格，基於給定K值和期望ARL來決定。

# Example

- TBE CUSUM 設計，假設目標值為允許不良率  $\mu_a = 0.00001$  (10PPM)、 $\mu_d = 0.000018$  (18PPM)。
- 檢查不良單位數向上偏移 = 良品單位  $y_i$  數量下降。
- $k_t = \frac{\ln(0.000010/0.000018)}{(0.000010/0.000018) - 1} = 0.73473$ 、 $k = \frac{k_t}{\mu_a} = \frac{0.73473}{0.000010} = 73473$
- $S_i = \max(0, 73473 - y_i + S_{i-1})$
- 假設  $h_t$  選定為 5.6 使 ARL 近似 500。因此上管制界線： $h = \frac{h_t}{\mu_a} = \frac{5.6}{0.000010} = 560000$

# Example

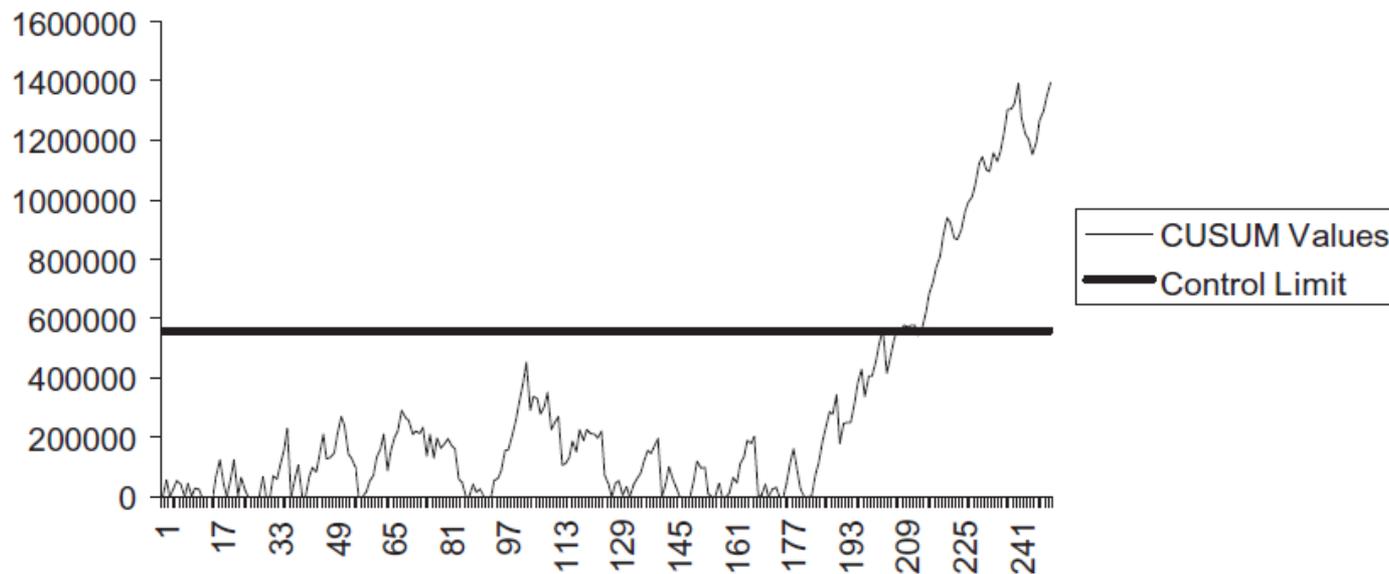


Figure 1. TBE CUSUM example ( $h = 560\,000$ ;  $k = 73\,473$ ) with a shift from mean defect rate from 10 to 18 PPM introduced at  $n = 200$ .

- 平均不良率10PPM偏移到18PPM發生在200週期。管制圖發出警告在211週期。TBE CUSUM設計理論的ARL用來偵測偏移近似31 (using Lucas (1985) tables)

# Example

- 為了求算 $k_t$ 和 $k$ ，只需要依據

$$\mu_d/\mu_a = 0.000018/0.00001 = 1.8 \rightarrow k_t=0.73473$$

- $\mu_d/\mu_a$  顯示製程偏離目標的程度。

# Example

- 這篇研究猜想CUSUM統計量對於TBE分配在TBE形式或許穩健，某些情況不適合指數分配，因為其缺陷發生不服從Poisson。
- Burr (1967), Schilling and Nelson (1976), Chan et al. (1998), and Yourstone and Zimmer (1992) 研究 $\bar{x}$ 和R charts對於常態假設的穩健性。
- Borrer et al. (1999)研究常態EWMA管制圖的穩健性。
- 這篇將研究Weibull和lognormal TBE分配在特定範圍的穩健性。

# Robustness study

- TBE CUSUM穩健性研究，選擇在可接受不良率  $\mu_a$  的不同偏移範圍，檢查其相對於管制外 ARL 的績效。

EX：  $\mu_a$  為 10PPM、 $\mu_d$  為 20PPM  $\rightarrow \mu_d/\mu_a = 2$

- 偏移程度是經由超過 12 個工業組織共同參予決定的，應用 TBE CUSUM 在其產品或製程。

- Determining h and k

Weibull distribution

Lognormal distribution

# Robustness study — Determining $h$ and $k$

- 在管制內 ARL 已知下計算不同偏移範圍的  $k$  和決定  $h$ ：

Shift	DPMU (in-control ARL = 100)		DPMO (in-control ARL = 1000)	
	$k$	$h$	$k$	$h$
1.5	0.8	4.0	0.8	7.74
2	0.7	2.78	0.7	4.98
5	0.4	0.85	0.4	1.4
10	0.25	0.387	0.25	0.621

Table 1. Appropriate values of  $k$  and  $h$ .

# Robustness study — Weibull distribution

- 使用 Weibull 分配是因為當形狀參數增加，Weibull 將慢慢地偏離指數分配。
- 在假設事件發生時間間隔服從 exponential 下，研究 TBE CUSUM 在 Weibull 分配下的績效。

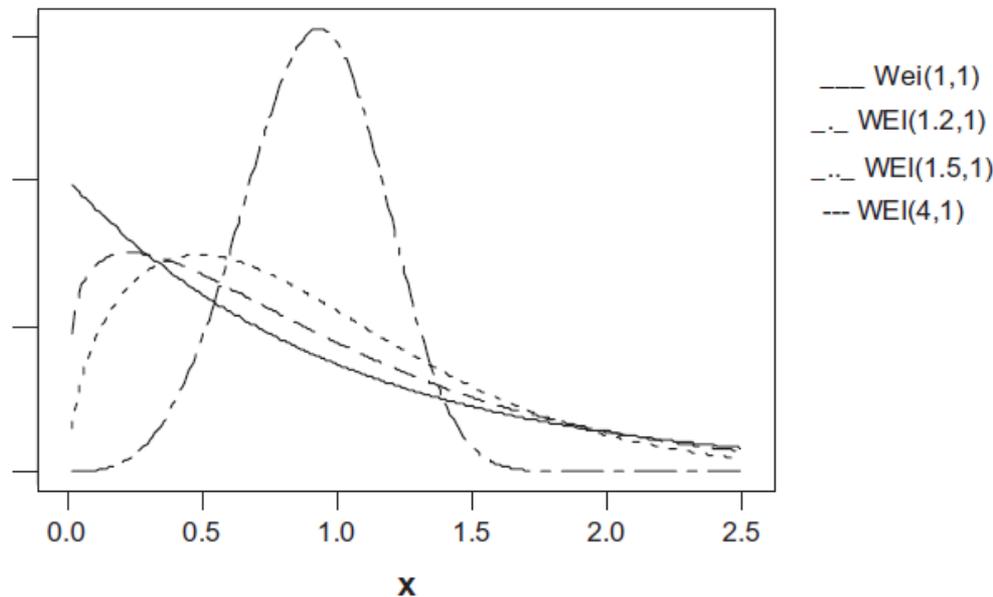


Figure 2. Various Weibull distributions.



# Robustness study — Weibull distribution

## ■ DPMU

$k$	$h$	$\beta = 1$	$\beta = 1.2$	$\beta = 1.5$	$\beta = 2$	$\beta = 2.5$	$\beta = 4$
0.8	4.0	106	222	757	8444	142 733	$3.85 \times 10^9$
0.7	2.78	106.7	258	1141	19 986	503 505	$2.72 \times 10^{10}$
0.4	0.85	106	313	1780	38 438	915 367	$1.41 \times 10^{10}$
0.25	0.387	106.6	326	1846	35 121	673 167	$4.3 \times 10^9$

Table 2. In-control ARLS involving the Weibull distribution for DPMU.

$k$	$h$	Shift ( $\mu_d$ )	$\beta = 1$	$\beta = 1.2$	$\beta = 1.5$	$\beta = 2$	$\beta = 2.5$	$\beta = 4$
0.8	4.0	1.5	22.5	25	27	29	30	30.7
0.7	2.78	2	12.8	13.5	14.1	14.4	14.6	14.6
0.4	0.85	5	4.7	4.8	4.8	4.8	4.8	4.8
0.25	0.387	10	3.1	3.1	3.1	3.1	3.1	3.1

Table 3. Out-of-control ARLs involving the Weibull distribution for DPMU.

ARL根據Markov chain method of Brook and Evans (1972)計算得來



# Robustness study — Weibull distribution

## ■ DPMO

$k$	$h$	$\beta = 1$	$\beta = 1.2$	$\beta = 1.5$	$\beta = 2$	$\beta = 2.5$	$\beta = 4$
0.8	7.74	1001	4114	48 289	6 343 893	$1.77 \times 10^9$	*****
0.7	4.98	1003	5018	78 609	15 105 836	$5.2 \times 10^9$	$8.4 \times 10^{15}$
0.4	1.4	1004	6011	104 771	15 646 334	$2.67 \times 10^9$	$1.62 \times 10^{16}$
0.25	0.621	1003	5878	90 787	9 433 651	998 751 015	$1.13 \times 10^{15}$

Table 4. In-control ARLs involving the Weibull distribution for DPMO.

$k$	$h$	Shift ( $\mu_d$ )	$\beta = 1$	$\beta = 1.2$	$\beta = 1.5$	$\beta = 2$	$\beta = 2.5$	$\beta = 4$
0.8	7.74	1.5	49	52.5	55	57	58	59
0.7	4.98	2	24	24.5	25	25.4	25.5	25.5
0.4	1.4	5	7.5	7.6	7.6	7.6	7.6	7.5
0.25	0.621	10	4.7	4.7	4.7	4.7	4.7	4.65

Table 5. Out-of-control ARLs involving the Weibull distribution for DPMO.

# Robustness study — Weibull distribution

- 無論TBE CUCUM偏離指數分配，管制內ARL指出其很少出現假警報。
- Table 3顯示在不同偏移範圍，管制外ARLs指出TBE CUCUM很快檢測出製程偏移，無論偏移程度或偏移指數分配。
- 因此在不同偏移程度和不同 $\beta$ 值，DPMU和DPMO顯然皆具有穩健性的。

# Robustness study — Weibull distribution

## ■ DPMU

$k$	$h$	$\beta = 1$	$\beta = 1.2$	$\beta = 1.5$	$\beta = 2$	$\beta = 2.5$	$\beta = 4$
0.8	4.0	106	222	757	8444	142 733	$3.85 \times 10^9$
0.7	2.78	106.7	258	1141	19 986	503 505	$2.72 \times 10^{10}$
0.4	0.85	106	313	1780	38 438	915 367	$1.41 \times 10^{10}$
0.25	0.387	106.6	326	1846	35 121	673 167	$4.3 \times 10^9$

Table 2. In-control ARLS involving the Weibull distribution for DPMU.

$k$	$h$	Shift ( $\mu_d$ )	$\beta = 1$	$\beta = 1.2$	$\beta = 1.5$	$\beta = 2$	$\beta = 2.5$	$\beta = 4$
0.8	4.0	1.5	22.5	25	27	29	30	30.7
0.7	2.78	2	12.8	13.5	14.1	14.4	14.6	14.6
0.4	0.85	5	4.7	4.8	4.8	4.8	4.8	4.8
0.25	0.387	10	3.1	3.1	3.1	3.1	3.1	3.1

Table 3. Out-of-control ARLs involving the Weibull distribution for DPMU.

# Robustness study — Lognormal distribution

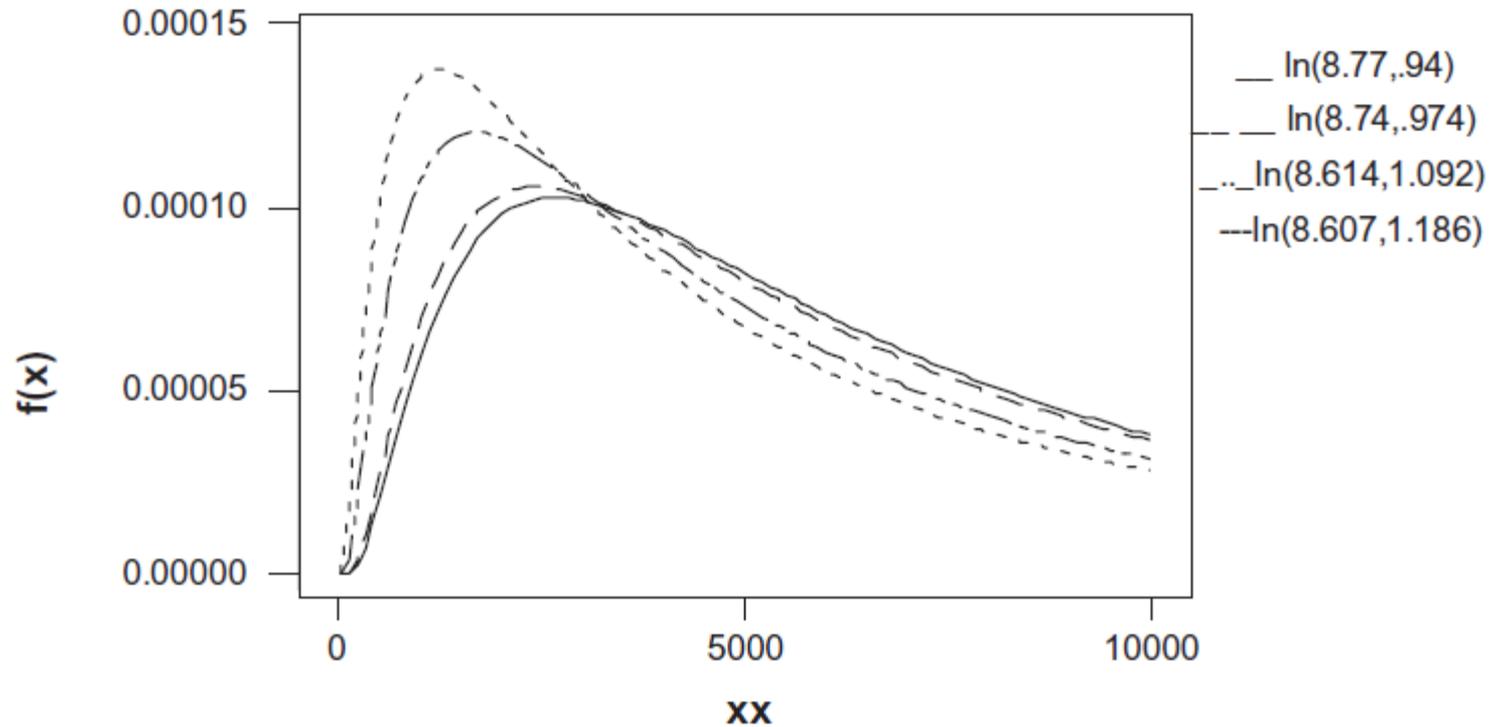


Figure 3. Various lognormal distributions.

# Robustness study — Lognormal distribution

## ■ DPMU

$k$	$h$	$\sigma = 0.94$	$\sigma = 0.974$	$\sigma = 1.092$	$\sigma = 1.182$
0.8	4.0	100	85	54	41
0.7	2.78	123	100	56	40
0.4	0.85	432	291	100	55
0.25	0.387	1712	1004	233	100

Table 6. In-control ARLs involving the lognormal distribution for DPMU.

$k$	$h$	Shift ( $\mu_d$ )	$\sigma = 0.94$	$\sigma = 0.974$	$\sigma = 1.092$	$\sigma = 1.182$
0.8	4.0	1.5	21	20	18	16
0.7	2.78	2	12	12	11	10
0.4	0.85	5	4.5	4.5	4.4	4.3
0.25	0.387	10	3	3	3	2.8

Table 7. Out-of-Control ARLs Involving the Lognormal Distribution for DPMU.

# Robustness study — Lognormal distribution

## ■ DPMO

$k$	$h$	$\sigma = 0.917$	$\sigma = 0.9538$	$\sigma = 1.0806$	$\sigma = 1.1716$
0.8	7.74	1000	711	289	181
0.7	4.98	1559	1000	316	177
0.4	1.4	16060	7468	1000	363
0.25	0.621	133576	50417	3774	1000

Table 8. In-control ARLs involving the lognormal distribution for DPMO.

$k$	$h$	Shift ( $\mu_d$ )	$\sigma = 0.917$	$\sigma = 0.9538$	$\sigma = 1.0806$	$\sigma = 1.1716$
0.8	7.74	1.5	46	45	41	38
0.7	4.98	2	23	22	21	20
0.4	1.4	5	7.3	7.3	7.1	7
0.25	0.621	10	4.6	4.6	4.5	4.4

Table 9. Out-of-control ARLs involving the lognormal distribution for DPMO.

# Robustness study — Lognormal distribution

- 無論偏移指數分配，lognormal分配的ARL指出TBE CUSUM具有穩健性。
- TBE CUSUM能夠很快偵測出小偏移(1.5:1)。

# Conclusions

- 研究論證TBE CUSUM具有穩健性，無論其偏離exponential分配。
- Weibull分配的TBE CUSUM，在小偏移形狀參數增加時，其穩健性較差。
- Lognormal分配的TBE CUSUM，不論在大小偏移皆具有穩健性。
- 研究觀察指出使用TBE CUSUM不需關心偏離指數分配。研究指出失效時間間隔分配的偏斜程度與TBE CUSUM的穩健性或許有顯著關係。