



國立雲林科技大學工業工程與管理所

Graduate school of Industrial Engineering & Management,
National Yunlin University of Science & Technology

系統可靠度實驗室 System Reliability Lab.

<http://campusweb.yuntech.edu.tw/~gre/index.htm>

Adaptive CUSUM control chart with variable sampling intervals



作者：Yunzhao Luo, Zhonghua Li, Zhaojun Wang*
出處：Computational Statistics and Data Analysis 53
(2009) 2693-2701

報告者：郭秉裕

指導老師：童超塵 教授

Brief introduction of existing work (1/3)



Brief introduction of existing work (2/3)

- 轉移空間(transition space) $L : [h^*, h] \times [\delta_{\min}, \delta_{\max}]$ 分割成兩子區域(subregion) : $L_1 : [h^*, g] \times [\delta_{\min}, \delta_{\max}]$ 和 $L_2 : (g, h] \times [\delta_{\min}, \delta_{\max}]$ 。

Here, ϵ is a chosen small enough and N is a chosen small enough.

較大的 N 值將獲得高精確性，但需更多時間去計算；然而較小的 N 值亦不會缺乏精確性。但建議使用高維轉移空間，一旦參數被獲得，可運用在所有時間。

- 1), 除了第一段寬度為 w_{c1} ，為 $2(g - h^*) / (m_{c1} - 1)$ ，第一段寬度為 $w_{c1} / 2$ ； $(g, h]$ 範圍為 w_{c2} ，為 $(h - g^*) / m_{c2}$ 。
- L 管制內區域可分割成個數 $N = (m_{c1} + m_{c2}) \times m_{\delta}$ 二維矩形。



Brief introduction of existing work (3/3)

作者	Sparks(2000)	Reynolds&Arnold(1990)
模式	Upper-sided ACUSUM管制圖 $\begin{cases} C_0 = 0, \\ C_i = \max(0, C_{i-1} + X_i - k_i), \\ k_i = \hat{\delta}_i/2. \end{cases}$ 修正後 $\begin{cases} C_0 = 0, \\ C_i = \max\{0, C_{i-1} + (X_i - k_i)/h(k_i)\}, \\ k_i = \hat{\delta}_i/2. \end{cases}$	Upper-sided VSI CUSUM管制圖 $\begin{cases} C_0 = 0, \\ C_i = \max(0, C_{i-1}) + X_i - k, \\ k = \delta/2. \end{cases}$ 且 $T_i = \begin{cases} t_1, & \text{if } C_i < g, \\ t_2, & \text{if } g \leq C_i < h. \end{cases}$
說明	若任一C_i超出決策區間$h(k_i)$，則管制訊號響起。然而根據k值，管制界限$h(k_i)$總需無時無刻改變去達成所希望之相同ARL_0。故修正後當$C_i > h$則警報響起，而h為給定常數，其接近但不為1，因$\hat{\delta}_i$估計式有誤差。	由於VSI管制圖，直到訊號響起時間不再是常數倍之連串長度，故Reynolds et al.(1988)引進兩量測值ATS&AATS。



Our proposed VSI ACUSUM control scheme (1/4)

The design of our proposed control scheme

- 一個具有變動抽樣計畫之 modified ACUSUM管制圖，在此稱之為VSI ACUSUM。其特色：
 - 根據EWMA operator，持續利用資料訊息去修正其自身，ACUSUM 管制圖對於偵測平均值偏移範圍，預期達成一整體績效。
 - 加入變動抽樣計畫，從時間和經濟觀點看，預期大幅增加管制圖偵測能力。
- 一Modified EWMA operator被用於獲得 $\hat{\delta}_0$ 可定義如下：

$$\cancel{Q_i = (1 - \lambda)Q_{i-1} + \lambda X_i} \quad \longrightarrow \quad \hat{\delta}_i = \max \left\{ \delta_{\min}, (1 - \lambda)\hat{\delta}_{i-1} + \lambda X_i \right\},$$



Our proposed VSI ACUSUM control scheme (2/4)

- Shu & Jiang(2006)對於整體upper-sided CUSUM管制圖建立閾值和參考值關係：

$$h(k) = \frac{\ln(1 + 2k^2 ARL_0 + 2.332k)}{2k} - 1.166.$$

- 注意！**當 ARL_0 為定值時， $h(k)$ 為 k 的遞減函數，因此固定閾值下，監控CUSUM統計量意謂著對於小偏移有相對嚴謹(tight)管制；而大偏移則相對寬鬆(loose)管制。
- 為了同時平衡對於小和大偏移偵測敏感度，根據 $h(\hat{\delta}_i/2)$ ，對 $X_i, \hat{\delta}_i/2$ 作補償標準化(standardization)。管制計畫在加入具有VSI特色，其必須根據tradition VSI CUSUM型式去修正新適應性CUSUM統計量。
 - VSI ACUSUM管制圖：
$$\begin{cases} C_0 = 0, \\ C_i = \max(0, C_{i-1}) + (X_i - k_i)/h(k_i), \\ k_i = \hat{\delta}_i/2, \end{cases}$$
 - 計算落於 $(-\infty, g] \& (g, h]$ 之機率
$$\begin{cases} \rho_1 t_1 + \rho_2 t_2 = 1, \\ \rho_1 + \rho_2 = 1, \end{cases}$$

Our proposed VSI ACUSUM control scheme (3/4)

The effects of parameters

- Sparks(2000)建議選擇 $\hat{\delta}_0$ 為未來平均值偏移最佳猜值或無過多其它影響研究上假設 $\hat{\delta}_0=1$ 。由於 $\delta_{\min}$ 為EWMA估計式最低界限，合於邏輯 $\hat{\delta}_0 \geq \delta_{\min}$ 。
- 通常 $\hat{\delta}_0$ 較大，對於大偏移能改善管制圖敏感度；但對於小偏移則降低其敏感度。有趣一點為， $\hat{\delta}_0$ 在 ATS_0 有較小影響，但在 ATS_1 有極大影響。

Table 1

The zero-state ATS of VSI ACUSUM charts with different $\hat{\delta}_0$.

δ	$\hat{\delta}_0$				
	0.5	1.0	1.5	2.0	2.25
0.00	392.80	395.14	396.62	398.54	400
0.50	9.97	10.81	13.12	15.97	17.56
1.00	2.92	3.16	3.91	5.19	5.97
1.50	1.35	1.35	1.56	2.00	2.30
2.00	0.74	0.69	0.74	0.88	0.99
2.50	0.45	0.40	0.40	0.44	0.48
3.00	0.31	0.26	0.25	0.25	0.26
3.50	0.24	0.20	0.18	0.17	0.17
4.00	0.20	0.17	0.15	0.13	0.13

Our proposed VSI ACUSUM control scheme (4/4)

□ 假設 $[\delta_1, \delta_2]$ 為所需偵測潛在平均偏移範圍，則制定VSI ACUSUM計畫有五點方針遵守：

1. 選擇 $\delta_{\min} = \delta_1$
2. 設定 $\hat{\delta}_0 = (\delta_1 + \delta_2)/2$
3. Symmetric form
4. 基於thumb原則選擇 λ
5. 找尋 h 和 g 以達所希望 ATS_0



Performance comparisons (1/4)

The comparisons between VSI ACUSUM and FSI charts

Table 3

The steady-state AATS for detecting a range shift [0.5, 4.0].

δ	VSI ACUSUM $h = 1.181$ $\delta_{\min} = 0.5$ $\lambda = 0.1, g = 0.122$	FSI ACUSUM $h = 1.181$ $\delta_{\min} = 0.5$ $\lambda = 0.1$	DCUSUM $h_1 = 7.51$ $h_2 = 1.21$ $k_1 = 0.25, k_2 = 2.0$	SC $h_c = 8.11$ $h_{\bar{x}} = 3.00$
0.00	400	400	400	400
0.25	38.98	60.09	64.76	71.08
0.50	10.54	21.88	23.02	24.76
0.75	5.24	12.39	12.95	13.83
1.00	3.61	8.45	8.88	9.42
1.25	2.65	6.34	6.69	7.05
1.50	2.09	5.06	5.30	5.54
1.75	1.74	4.20	4.33	4.48
2.00	1.50	3.60	3.59	3.69
2.25	1.34	3.15	3.00	3.06
2.50	1.23	2.81	2.53	2.56
2.75	1.16	2.54	2.16	2.16
3.00	1.10	2.32	1.86	1.84
3.25	1.07	2.14	1.64	1.60
3.50	1.04	1.99	1.46	1.41
3.75	1.02	1.87	1.33	1.28
4.00	1.01	1.77	1.23	1.18



Performance comparisons (2/4)

The comparisons between VSI ACUSUM and VSI CUSUM

- 定義一新標準引進-相對AATS積分(the integral of relative AATS;IRAATS)，其近似Zhao et al.(2005)所提出IRARL：

$$\text{IRAATS}(C) = E \left[\frac{\text{AATS}_c(\delta)}{\text{AATS}_{op}(\delta)} \right] = \int \frac{\text{AATS}_c(\delta)}{\text{AATS}_{op}} dF(\delta),$$



$$\text{IRAATS} \approx \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m \frac{\text{AATS}_c(\delta_i)}{\text{AATS}_{op}(\delta_i)}, \text{ where } m \text{ is a given integer, and } \delta_i = \delta_1 + \frac{i}{m}(\delta_2 - \delta_1)$$

- $\text{AATS}_c(\delta)$ 和 $\text{AATS}_{op}(\delta)$ 分別為C管制圖和具有 $k = \delta/2$ 之CUSUM管制圖之管制外AATS。
- 若我們無任何有關偏移事前訊息，則均勻分配 $U(\delta_1, \delta_2)$ 可運用於 $F(\delta)$ 。



Performance comparisons (3/4)

Table 5

The steady-state AATS and IRAATS (range shift [0.5, 2.0]).

δ	VSI ACUSUM		VSI CUSUM			Optimal AATS
	λ		k			
	0.1	0.2	0.25	0.625	1	
0.00	400	400	400	400	400	400
0.50	10.54	10.62	10.44	17.20	29.63	10.44
0.75	5.24	5.33	5.21	6.01	9.83	5.04
1.00	3.61	3.52	3.40	3.08	4.16	2.99
1.25	2.65	2.60	2.52	2.05	2.33	2.05
1.50	2.09	2.05	2.01	1.59	1.64	1.58
1.75	1.74	1.71	1.69	1.35	1.33	1.32
2.00	1.5	1.48	1.49	1.21	1.17	1.17
IRAATS	1.21	1.17	1.18	1.14	1.48	\

Table 6

The steady-state AATS and IRAATS (range shift [1.0, 3.0]).

δ	VSI ACUSUM		VSI CUSUM			Optimal AATS
	λ		k			
	0.1	0.2	0.5	1	1.5	
0.00	400	400	400	400	400	400
1.00	3.12	3.06	2.99	4.16	7.09	2.99
1.25	2.13	2.08	2.09	2.33	3.41	2.05
1.50	1.61	1.64	1.65	1.64	2.03	1.58
1.75	1.37	1.39	1.41	1.33	1.47	1.32
2.00	1.23	1.24	1.26	1.17	1.23	1.17
2.25	1.14	1.15	1.17	1.09	1.10	1.09
2.50	1.08	1.09	1.11	1.04	1.03	1.03
2.75	1.04	1.04	1.06	1.00	0.99	0.99
3.00	1.02	1.01	1.04	0.98	0.97	0.97
IRAATS	1.04	1.04	1.06	1.09	1.28	\

Performance comparisons (4/4)

□ 使用 VSI ACUSUM 管制圖三項原因：

1. 在現實生活中，製程偏移真實量值很少能知道，由於 VSI ACUSUM 具有半適應(self-adaption)特色，能成為較佳監控計畫。
2. 使用 EWMA operator，對於製程平均數水準能得到一階初始(one-step ahead)預測，此為 traditional CUSUM 無法獲得
3. 具有 VSI 特色絕不影響管制圖 ARL 績效為所知道，但從 ATS 觀點而言，VSI ACUSUM 表現較好。



Conclusion and remarks (1/2)

- 對於偏移範圍，ACUSUM管制圖已發展達到整體績效，在加入VSI特色後，對於連串時間績效將優於FSI型式。然而，如同它FSI型式，VSI ACUSUM管制圖對於偵測平均數偏移範圍繼承其良好整體績效，亦無技術上困難去延伸其雙尾管制計畫，但存在一可能障礙為Markov chain上過多轉移狀態造成ATS計算偏於複雜。
- 關於ACUSUM管制圖所感興趣議題可於未來被提出，例如：EWMA operator在此僅扮演為平滑器(smoother)，但它並非無用於產生一個訊號，對於大偏移來說，若較大 λ 值其績效如同Shewhart管制圖。



Conclusion and remarks (2/2)

- 對於未來改善大偏移偵測給定兩個建議
 - 疊加Shewhart管制界限於本paper所提VSI ACUSUM中。
 - 使用Markovian型式平均數估計式去取代EWMA operator，則 $\delta \geq \delta_{\min}$ 不必去思考，幫助EWMA估計式克服穩態惰性。

$$\hat{\delta}_i = \hat{\delta}_{i-1} + \phi(a_i),$$

where $a_t = X_i - \hat{\delta}_{i-1}$ is the prediction error and $\phi(\cdot)$ is a monotone function.

