



A control chart for the Gamma distribution as a model of time between events

出 處：International Journal of Production Research,
Vol. 45, No. 23, 1 December 2007, 5649–5666

作 者：C. W. ZHANG*, M. XIE, J. Y. LIU and T. N. GOH

報 告 者：鄭欣卉

指導老師：童超塵教授



Contents

- Introduction
- A Gamma chart for monitoring exponential TBE
- Evaluation of the Gamma chart
- Comparison of the Gamma chart and exponential CUSUM
- Applications
- Conclusions

Introduction

- 在製造業不良品的發生通常模式化為Poisson過程，有兩種方式來監控其發生頻率：
 - Poisson計數：在固定時間間隔計算不良品數，包括shewhart c-chart和Poisson CUSUM
 - inter-arrival times of non-conforming items：服從(i.i.d.)指數分配，包括exponential chart、exponential CUSUM chart、exponential EWMA chart



Introduction

- Lucas and Vardeman and Ray (1985)是第一位研究監控time between events(TBE)管制圖技術。
- TBE管制圖適用於高品質製程，主要關心事件發生頻率的變化。

Introduction

- 此研究提出Gamma chart，其樣本統計量為直到觀察到 r th事件的時間，服從Gamma分配。
- 研究動機是由於CCC-r charts(Ohta et al 2001)擴展和改善了CCC chart，證明其在小偏移比CCC chart 更具敏感性。因此由於CCC-r和Gamma chart 很相似，因此假設Gamma chart 也會比起exponential chart更具敏感性。
- 此研究也會做Gamma chart和 exponential CUSUM的比較。

A Gamma chart for monitoring exponential TBE

- 模式化特定事件發生為同質Poisson過程，參數 λ_0 (管制內) 和 λ_1 (管制外)。
- Gamma chart 的統計量為直到觀察到rth事件為止所需的時間
 - $G_0(r, \lambda_0)$
 - $G_1(r, \lambda_1)$

A Gamma chart for monitoring exponential TBE

- **LCL**：用來偵測發生頻率上升(系統惡化)

$$F_{G_0}(L) = 1 - e^{-\lambda_0 L} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(\lambda_0 L)^j}{j!} = \alpha.$$

- **UCL**：用來偵測發生頻率下降(系統改善)

$$F_{G_0}(U) = 1 - e^{-\lambda_0 U} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(\lambda_0 U)^j}{j!} = 1 - \alpha.$$

Evaluation of the Gamma chart

- 評估TBE管制圖績效，通常假設在觀察TBE樣本後立即發生可歸屬原因，此為”fixed-shift”模型(Wu et al. 2001)。
- 但實際上，可歸屬原因可能發生在TBE樣本中的任何一個時間點，此更實際模型稱為”random-shifted”模型(Wu et al. 2001)。
- 此研究使用Monte Carlo模擬同時調查和比較兩種模型。



Evaluation of the Gamma chart

■ Detection of deterioration

- Out-of-control ATS
- Comparison with Monte Carlo simulation

■ Detection of improvement

- Out-of-control ATS
- Comparison with Monte Carlo simulation

Evaluation of the Gamma chart

—Detection of deterioration

- 給定 ATS_0^L (lower-sided Gamma chart 管制內 ATS)
，即可計算 LCL。

$$ATS_0^L = \frac{r}{\lambda_0 \left(1 - e^{-\lambda_0 L} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(\lambda_0 L)^j}{j!} \right)}.$$

- Out-of-control ATS

- fixed-shift 模型

$$ATS_{\text{fix}}^L = \frac{r}{\lambda_1 (1 - \beta_L)}.$$

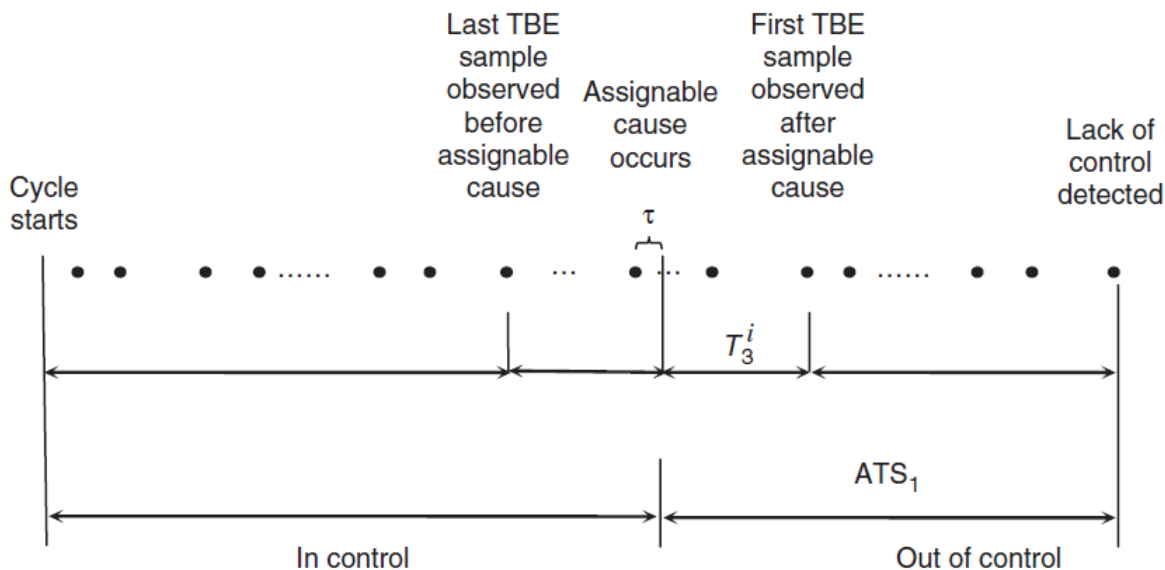
where $\beta_L = 1 - F_{G_1}(L) = e^{-\lambda_1 L} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(\lambda_1 L)^j}{j!}.$

Evaluation of the Gamma chart

—Detection of deterioration

■ random-shift模型

- 假設存在可歸屬原因
- T_α : 可歸屬原因發生時間點
- λ_α : 可歸屬原因發生頻率
- Figure 1. Illustration of the random-shift model



Evaluation of the Gamma chart

—Detection of deterioration

■ random-shifted模型

- 假設可歸屬原因發生在ith和(i+1)st事件，發生可歸原因期望時間(τ)

$$\tau \approx \frac{\int_{i/\lambda_0}^{(i+1)/\lambda_0} \lambda_a e^{-\lambda_a y} (y - i/\lambda_0) dy}{\int_{i/\lambda_0}^{(i+1)/\lambda_0} \lambda_a e^{-\lambda_a y} dy} = \frac{1}{\lambda_a} - \frac{1}{\lambda_0(e^{\lambda_a/\lambda_0} - 1)},$$

- $P_c(i)$ ：可歸屬原因發生在ith 指數隨機變數TBE樣本的機率

$$\begin{aligned} P_c(i) &\approx \Pr\{(i-1)/\lambda_0 \leq T_a \leq i/\lambda_0\} = \sum_{j=0}^{\infty} \Pr\{jr/\lambda_0 + (i-1)/\lambda_0 \leq T_a \leq jr/\lambda_0 + i/\lambda_0\} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} [e^{-jr\lambda_a/\lambda_0} (e^{-(i-1)\lambda_a/\lambda_0} - e^{-i\lambda_a/\lambda_0})] = \frac{e^{-(i-1)\lambda_a/\lambda_0} (1 - e^{-\lambda_a/\lambda_0})}{1 - e^{-r\lambda_a/\lambda_0}}. \end{aligned}$$

Evaluation of the Gamma chart

—Detection of deterioration

■ random-shifted模型

- ATS_1^L : LCL的管制外ATS

$$ATS_1^L = \sum_{i=1}^r P_c(i) \cdot ATS^L(i),$$

- $P_x^L(i)$: 如果可歸屬原因發生在第ith個指數隨機變數TBE樣本，可歸屬原因發生後第一個TBE樣本的檢定力，則可以近似：

$$p_x^L(i) \approx \Pr\{\tau + (i-1)/\lambda_0 + T_3^i \leq L\} = \Pr\{T_3^i \leq L - \tau - (i-1)/\lambda_0\},$$

- 其餘樣本的檢定力為 $1 - \beta_L$

Evaluation of the Gamma chart

—Detection of deterioration

■ Comparison with Monte Carlo simulation

Table 1. Comparison of out-of-control ATS for detecting deterioration, $\alpha = 0.05$, simulation sample size = 10000.

No.	λ_0	λ_1	λ_a	r	L	ATS_{fix}^L	ATS_1^L	ATS_{sim}^L	
								Value	Standard deviation
1	0.01	0.10	0.001	1	5.129	24.92	34.92	35.42	33.90
2	0.01	0.10	0.001	2	35.536	23.00	38.25	35.73	25.85
3	0.01	0.10	0.001	3	81.769	30.36	43.98	44.51	26.43
4	0.01	0.10	0.001	4	136.632	40.02	55.01	53.67	29.61
5	0.01	0.10	0.0001	1	5.129	24.92	34.92	34.70	33.11
6	0.01	0.10	0.0001	2	35.536	23.00	38.02	36.30	27.08
7	0.01	0.10	0.0001	3	81.769	30.36	44.12	45.00	26.52
8	0.01	0.10	0.0001	4	136.632	40.02	55.26	54.38	29.70
9	0.01	0.20	0.001	1	5.129	7.79	12.79	12.57	11.42
10	0.01	0.20	0.001	2	35.536	10.07	17.69	16.19	10.29
11	0.01	0.20	0.001	3	81.769	15.00	20.06	21.29	12.21
12	0.01	0.20	0.001	4	136.632	20.00	27.35	25.91	14.42
13	0.01	0.20	0.0001	1	5.129	7.79	12.79	12.52	11.28
14	0.01	0.20	0.0001	2	35.536	10.07	17.58	16.36	10.34
15	0.01	0.20	0.0001	3	81.769	15.00	20.22	21.75	12.30
16	0.01	0.20	0.0001	4	136.632	20.00	27.49	26.37	14.20
17	0.001	0.01	0.0001	1	51.293	249.21	349.21	347.19	335.34
18	0.001	0.01	0.0001	2	355.362	229.97	382.47	359.57	261.25
19	0.001	0.01	0.0001	3	817.691	303.64	439.78	443.85	263.02
20	0.001	0.01	0.0001	4	1366.32	400.25	550.11	538.80	298.67
21	0.001	0.01	0.00001	1	51.293	249.21	349.21	341.03	324.87
22	0.001	0.01	0.00001	2	355.362	229.97	380.22	356.42	260.83
23	0.001	0.01	0.00001	3	817.691	303.64	441.23	444.45	254.80
24	0.001	0.01	0.00001	4	1366.32	400.25	552.65	540.80	295.57
25	0.001	0.02	0.0001	1	51.293	77.94	127.94	124.64	112.60
26	0.001	0.02	0.0001	2	355.362	100.67	176.92	162.52	103.34
27	0.001	0.02	0.0001	3	817.691	150.00	200.59	213.62	123.21
28	0.001	0.02	0.0001	4	1366.32	200.00	273.50	260.61	143.06
29	0.001	0.02	0.00001	1	51.293	77.94	127.94	127.52	114.13
30	0.001	0.02	0.00001	2	355.362	100.67	175.79	162.78	99.23
31	0.001	0.02	0.00001	3	817.691	150.00	202.22	215.53	123.37
32	0.001	0.02	0.00001	4	1366.32	200.00	274.87	265.96	143.10

• ATS_1^L 非常接近 ATS_{sim}^L
(差異只有2%)

• ATS_{fix}^L 小於 ATS_{sim}^L
(差異30.2%)

• Fixed-shift模型的ATS顯著高估
Gamma char檢測惡化的績效

• Random-shift模型有更精確的評估



Evaluation of the Gamma chart

—Detection of improvement

- 給定 ATS_0^U (Upper-sided Gamma chart 管制內 ATS)
，即可計算 UCL。

$$ATS_0^U = \frac{r}{\lambda_0 \left(e^{-\lambda_0 U} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(\lambda_0 U)^j}{j!} \right)}.$$

- Out-of-control ATS

- fixed-shift 模型

$$ATS_{\text{fix}}^U = \frac{r}{\lambda_1 (1 - \beta_U)}.$$

where $\beta_U = F_{G_1}(U) = 1 - e^{-\lambda_1 U} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(\lambda_1 U)^j}{j!}.$

Evaluation of the Gamma chart

—Detection of improvement

■ random-shifted模型

- ATS_1^U : UCL管制外ATS

$$ATS_1^U = \sum_{i=1}^r P_c(i) \cdot ATS^U(i),$$

- $P_x^U(i)$: 如果可歸屬原因發生在第ith個指數隨機變數TBE樣本，可歸屬原因發生後第一個TBE樣本的檢定力，則可以近似：

$$p_x^U(i) \approx \Pr\{\tau + (i-1)/\lambda_0 + T_3^i \geq U\} = \Pr\{T_3^i \geq U - \tau - (i-1)/\lambda_0\}.$$

- 其餘樣本的檢定力為 $1 - \beta_U$

Evaluation of the Gamma chart

—Detection of improvement

■ Comparison with Monte Carlo simulation

Table 2. Comparison of out-of-control ATS for detecting improvement, $\alpha = 0.05$, simulation sample size = 10000.

No.	λ_0	λ_1	λ_a	r	L	ATS_{Lfix}^L	ATS_I^U	ATS_{1sim}^U	
								Value	Standard deviation
1	0.01	0.002	0.001	1	299.573	910.28	858.62	813.26	548.79
2	0.01	0.002	0.001	2	474.386	1325.21	1209.22	1153.10	710.88
3	0.01	0.002	0.001	3	629.579	1731.28	1525.50	1481.03	853.46
4	0.01	0.002	0.001	4	775.366	2155.57	1832.72	1780.60	978.93
5	0.01	0.002	0.0001	1	299.573	910.28	857.79	793.58	553.27
6	0.01	0.002	0.0001	2	474.386	1325.21	1205.10	1133.41	694.51
7	0.01	0.002	0.0001	3	629.579	1731.28	1516.32	1464.08	869.12
8	0.01	0.002	0.0001	4	775.366	2155.57	1816.08	1740.90	993.59
9	0.01	0.001	0.001	1	299.573	1349.28	1298.89	1242.18	1006.90
10	0.01	0.001	0.001	2	474.386	2179.93	1890.79	1857.47	1345.57
11	0.01	0.001	0.001	3	629.579	3080.52	2469.88	2435.87	1645.35
12	0.01	0.001	0.001	4	775.366	4032.94	3052.31	3034.27	1951.70
13	0.01	0.001	0.0001	1	299.573	1349.28	1298.10	1232.80	1005.08
14	0.01	0.001	0.0001	2	474.386	2179.93	1877.75	1824.83	1325.71
15	0.01	0.001	0.0001	3	629.579	3080.52	2436.11	2354.05	1620.30
16	0.01	0.001	0.0001	4	775.366	4032.94	2987.68	2924.25	1912.49
17	0.001	0.0002	0.0001	1	2995.730	9102.82	8586.16	8082.98	5459.53
18	0.001	0.0002	0.0001	2	4743.860	13252.12	12092.18	11630.72	6982.37
19	0.001	0.0002	0.0001	3	6295.790	17312.78	15255.00	14790.79	8567.49
20	0.001	0.0002	0.0001	4	7753.660	21555.68	18327.19	17874.51	9888.40
21	0.001	0.0002	0.00001	1	2995.730	9102.82	8577.88	7948.51	5439.90
22	0.001	0.0002	0.00001	2	4743.860	13252.12	12051.05	11402.87	7029.56
23	0.001	0.0002	0.00001	3	6295.790	17312.78	15163.19	14581.01	8592.25
24	0.001	0.0002	0.00001	4	7753.660	21555.68	18160.76	17729.60	10119.11
25	0.001	0.0001	0.0001	1	2995.730	13492.83	12988.87	12456.96	9982.18
26	0.001	0.0001	0.0001	2	4743.860	21799.27	18907.92	18631.81	13380.34
27	0.001	0.0001	0.0001	3	6295.790	30805.19	24698.76	24260.67	16480.58
28	0.001	0.0001	0.0001	4	7753.660	40329.37	30523.11	30649.06	19684.37
29	0.001	0.0001	0.00001	1	2995.730	13492.83	12980.99	12276.34	9850.85
30	0.001	0.0001	0.00001	2	4743.860	21799.27	18777.48	18114.04	13282.80
31	0.001	0.0001	0.00001	3	6295.790	30805.19	24361.08	23885.34	16488.72
32	0.001	0.0001	0.00001	4	7753.660	40329.37	29876.82	29379.00	19246.93

• ATS_1^U 非常接近 ATS_{1sim}^U
(差異只有2.8%)

• ATS_{1fix}^U 大於 ATS_{1sim}^U
(差異22.6%)

• Fixed-shift模型的ATS顯著低估
Gamma char檢測改善的績效

• Random-shift模型有更精確的評估



Comparison of the Gamma chart and exponential CUSUM

- 在相同管制內ATS內進行公平的比較
- 與最佳設計的Exponential CUSUM(Gan 1998)進行比較，設定 $\lambda_0 = 1$ 和 $ATS_0^L = 500$

Comparison of the Gamma chart and exponential CUSUM —Detection of deterioration

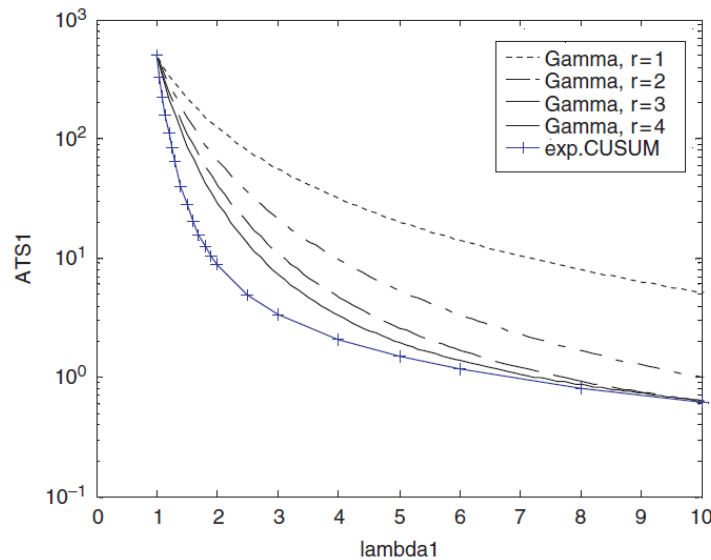


Figure 2. Comparison of lower-sided Gamma and lower-sided exponential CUSUM charts, $\lambda_0=1$, $ATS_0^L=500$, $\lambda_{1_opt}=2$.

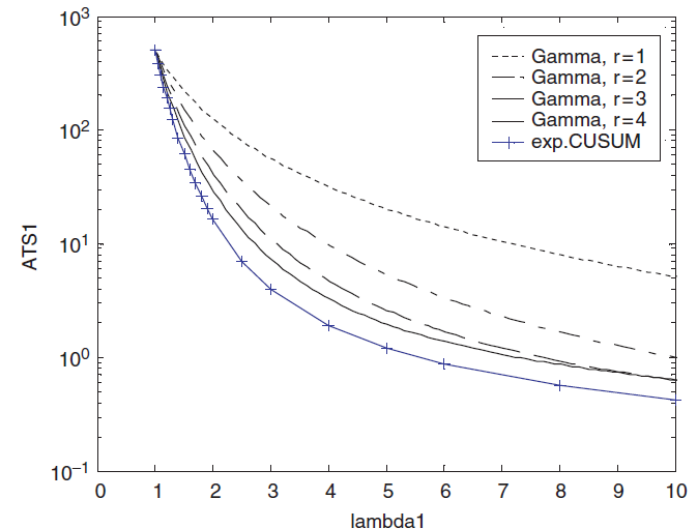


Figure 3. Comparison of lower-sided Gamma and lower-sided exponential CUSUM charts, $\lambda_0=1$, $ATS_0^L=500$, $\lambda_{1_opt}=5$.

- 當 r 增加 ATS_1^L 減少 (λ_1 保持不變) → Gamma chart 偵測惡化的敏感度增加
- Lower-sided Gamma chart 參數 $r=4$ 與 Lower-sided exponential CUSUM ATS 非常接近。
- 當 λ_1 上升，ATS 減少

Comparison of the Gamma chart and exponential CUSUM — Detection of improvement

■ 設定 $\lambda_0 = 1$ 和 $ATS_0^U = 500$

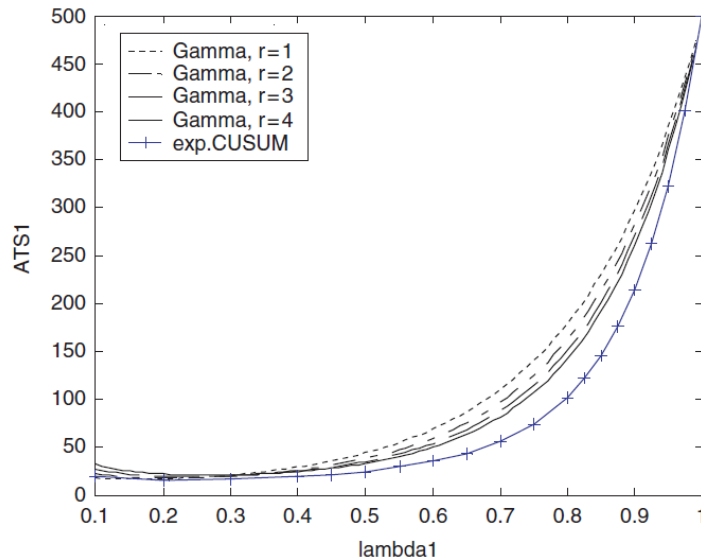


Figure 4. Comparison of upper-sided Gamma and upper-sided exponential CUSUM charts, $\lambda_0 = 1$, $ATS_0^L = 500$, $\lambda_{1_opt} = 0.5$.

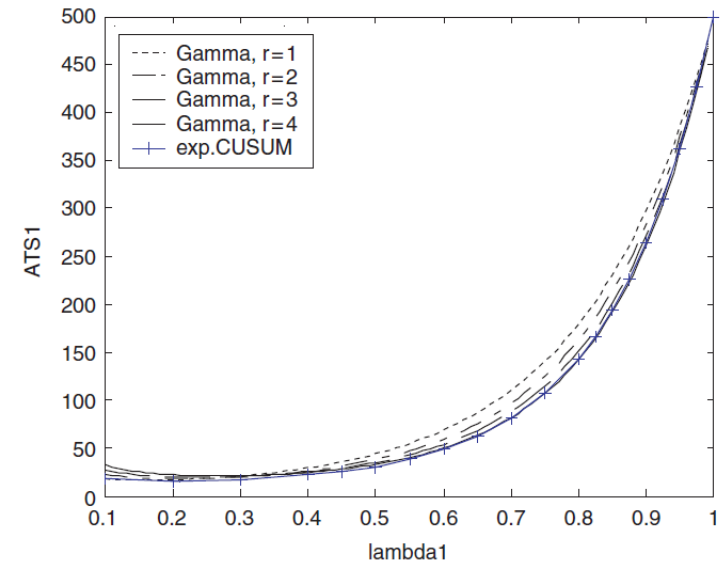


Figure 5. Comparison of upper-sided Gamma and upper-sided exponential CUSUM charts, $\lambda_0 = 1$, $ATS_0^L = 500$, $\lambda_{1_opt} = 0.2$.

- 當 r 增加 ATS_1^U 減少 (λ_1 保持不變) → Gamma chart 偵測改善的敏感度增加
- 圖4顯示 exponential CUSUM 優於 Gamma chart；圖5顯示 Gamma chart 參數 $r=4$ 與 exponential CUSUM ATS 幾乎重疊。
- 猜想 λ_{1_opt} 影響 exponential CUSUM 績效，而實際上 λ_{1_opt} 未知。

Comparison of the Gamma chart and exponential CUSUM

- 比較Gamma chart參數 $r=4$ 與最佳設計exponential CUSUM後，得到Gamma chart優勢：
 - 比較容易設計與評估
 - Gamma chart 的ATS容易使用此研究提出的近似方法來評估
 - exponential CUSUM的ATS必須跑複雜的程式或形成Monte Carlo模擬來評估(see Gan 1994, Gan and Choi 1994)
 - 更容易使操作者了解



Applications

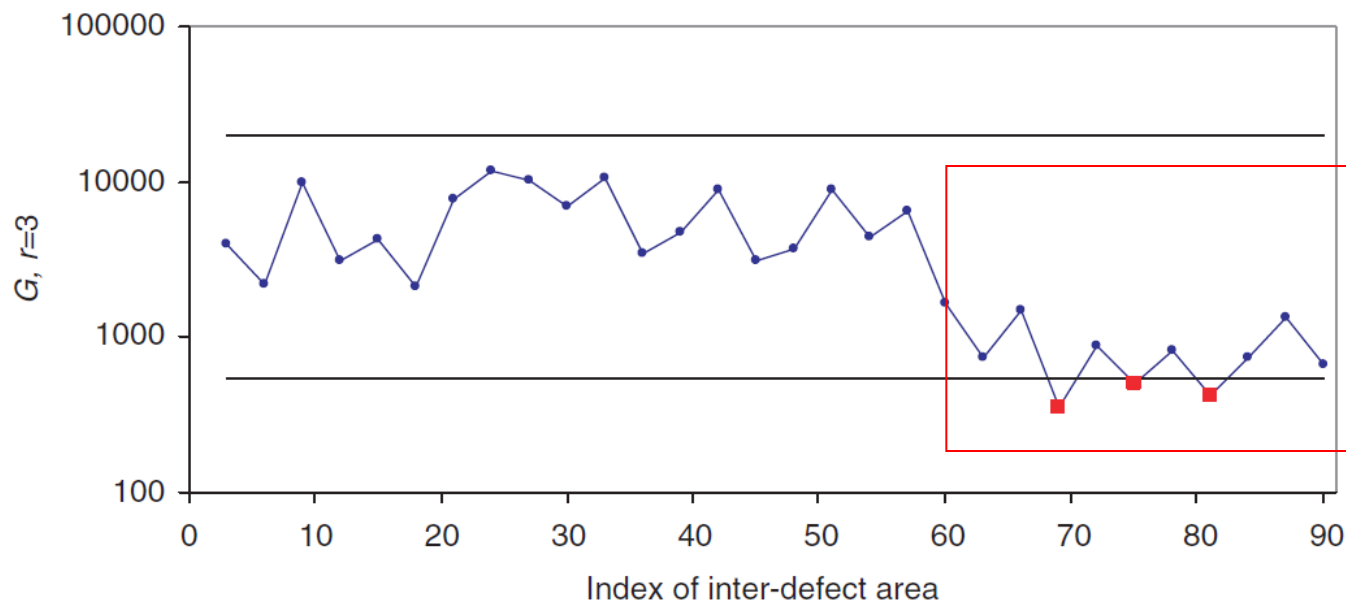
- 模擬造紙製程
- 煤礦災害
- 製造工廠意外

Applications—模擬造紙製程

Table 3. Tabulation of the Gamma chart for the paper manufacturing data.

Index of inter-defect area	X	$G(r=3)$	Index of inter-defect area	X	$G(r=3)$	Index of inter-defect area	X	$G(r=3)$	Index of inter-defect area	X	$G(r=3)$
1	102.3		25	3948.1		49	2377.4		73	379.8	
2	2929.5		26	3191.4		50	3325.1		74	13.6	
3	999.0	4030.8	27	3231.7	10371	51	3285.7	8988.2	75	106.4	499.8
4	1443.2		28	1009.0		52	764.8		76	295.6	
5	230.2		29	2602.5		53	2389.6		77	98.3	
6	543.4	2216.8	30	3230.8	6842.3	54	1226.2	4380.6	78	439.0	832.9
7	1568.5		31	8363.2		55	3782.6		79	273.7	
8	7979.6		32	584.0		56	719.4		80	23.0	
9	393.5	9941.6	33	1618.9	10566	57	1943.7	6445.7	81	126.9	423.6
10	1620.7		34	141.2		58	301.6		82	516.2	
11	970.9		35	1527.2		59	316.5		83	58.4	
12	466.5	3058.1	36	1741.4	3409.8	60	1043.2	1661.3	84	154.7	729.3
13	162.8		37	333.9		61	292.9		85	670.5	
14	607.1		38	1288.1		62	395.8		86	524.8	
15	3471.5	4241.4	39	3192.6	4814.6	63	44.8	733.5	87	166.3	1361.6
16	1804.3		40	794.6		64	1399.7		88	154.1	
17	133.4		41	353.2		65	88.0		89	331.0	
18	173.5	2111.2	42	7860.4	9008.2	66	9.9	1497.6	90	184.4	669.5
19	1781.9		43	767.6		67	3.3				
20	224.9		44	1937.9		68	79.1				
21	5698.4	7705.2	45	368.3	3073.8	69	274.7	357.1			
22	2083.3		46	1375.1		70	232.2				
23	413.6		47	686.5		71	514.0				
24	9238.3	11735	48	1693.1	3754.7	72	146.9	893.1			

Applications — 模擬造紙製程



- $\lambda_0 = 0.0005$
- $\lambda_1 = 0.003$
- $\alpha = 0.0027$
- $r=3$
- $UCL=20062$
- $LCL=541.2$

Figure 6. Gamma chart with $r=3$ for the paper manufacturing data.

Applications — 煤礦災害

Table 4. Tabulation of the Gamma chart for the coal-mining explosion data.

Index of inter-explosion interval	X	$G(r=2)$	Index of inter-explosion interval	X	$G(r=2)$	Index of inter-explosion interval	X	$G(r=2)$	Index of inter-explosion interval	X	$G(r=2)$
61	143		94	120	170	127	361		160	120	337
62	16	159	95	203		128	312	673	161	275	
63	27		96	176	379	129	354		162	20	295
64	144	171	97	55		130	307	661	163	66	
65	45		98	93	148	131	275		164	292	358
66	6	51	99	59		132	78	353	165	4	
67	208		100	315	374	133	17		166	368	372
68	29	237	101	59		134	1205	1222	167	307	
69	112		102	61	120	135	644		168	336	643
70	43	155	103	1		136	467	1111	169	19	
71	193		104	13	14	137	871		170	329	348
72	134	327	105	189		138	48	919	171	330	
73	420		106	345	534	139	123		172	312	642
74	95	515	107	20		140	456	579	173	536	
75	125		108	81	101	141	498		174	145	681
76	34	159	109	286		142	49	547	175	75	
77	127		110	114	400	143	131		176	364	439
78	218	345	111	108		144	182	313	177	37	
79	2		112	188	296	145	255		178	19	56
80	0	2	113	233		146	194	449	179	156	
81	378		114	28	261	147	224		180	47	203
82	36	414	115	22		148	566	790	181	129	
83	15		116	61	83	149	462		182	1630	1759
84	31	46	117	78		150	228	690	183	29	
85	215		118	99	177	151	806		184	217	246
86	11	226	119	326		152	517	1323	185	7	
87	137		120	275	601	153	1643		186	18	25
88	4	141	121	54		154	54	1697	187	1358	
89	15		122	217	271	155	326		188	2366	3724
90	72	87	123	113		156	1312	1638	189	952	
91	96		124	32	145	157	348		190	632	1584
92	124	220	125	388		158	745	1093			
93	50		126	151	539	159	217				



資料來自 Jerrett(1979)，Gan(1998)也使用此資料

Applications — 煤礦災害

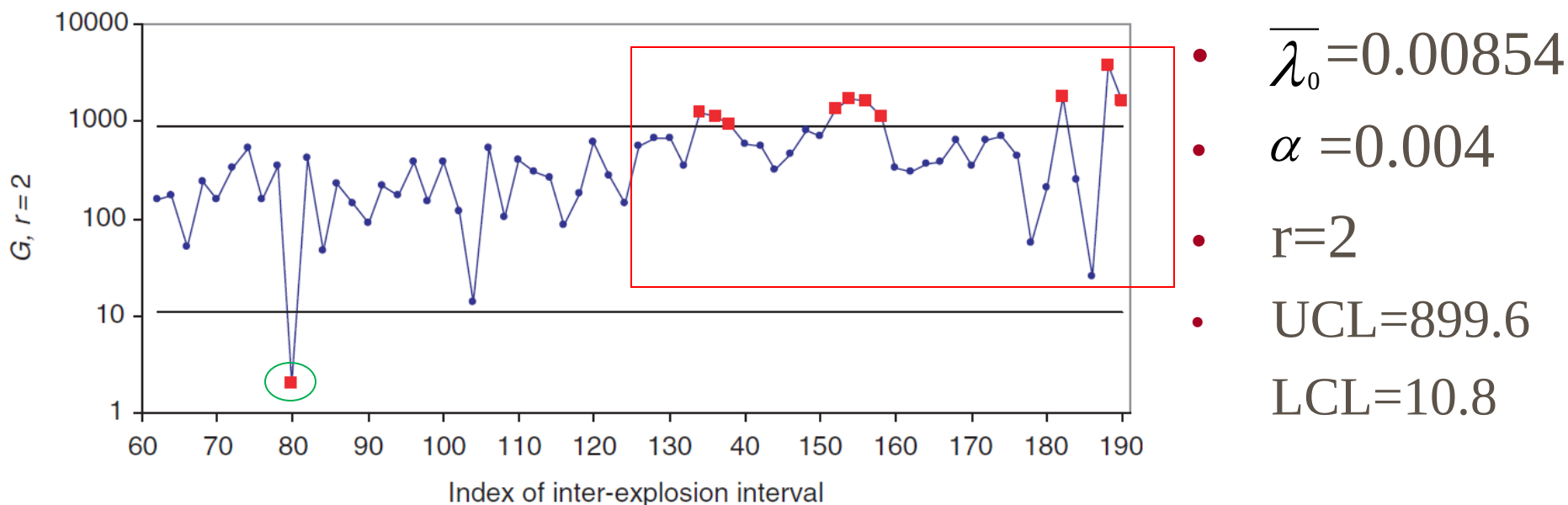


Figure 7. Gamma chart with $r=2$ for the coal-mining explosion data.

- 第80個點為假警報
- 從125點後很明顯地發生率開始下降
- 結果與exponential EWMA chart (Gan 1998)相似

Applications — 製造工廠意外

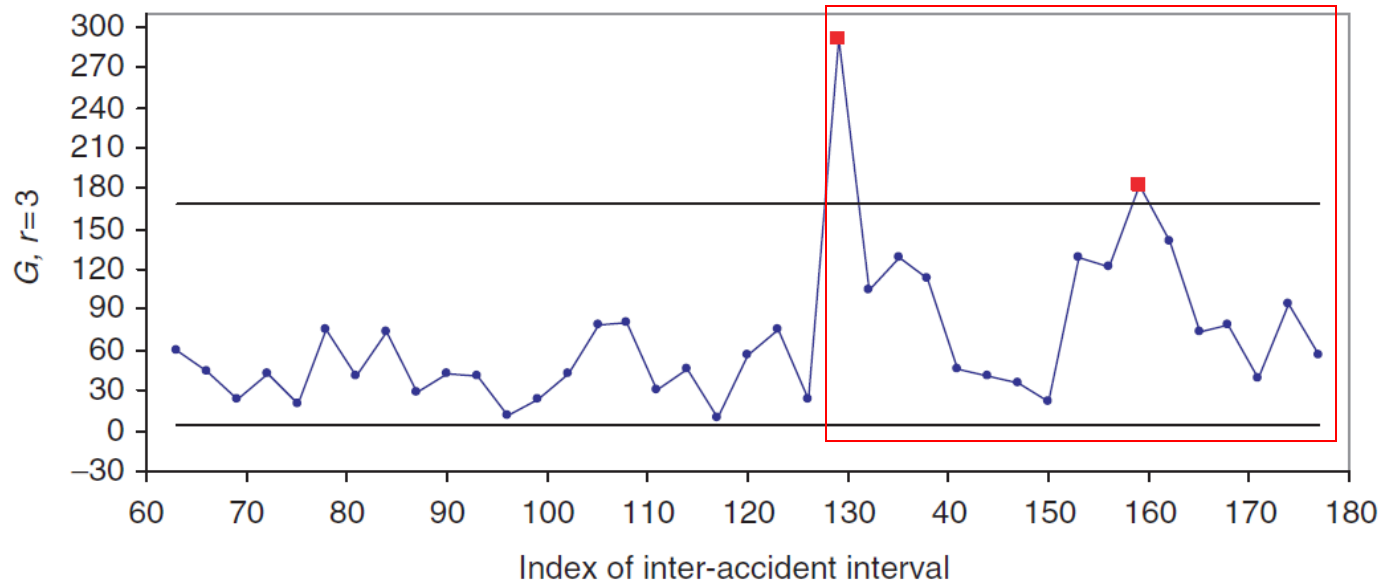
Table 5. Tabulation of the gamma chart for the plant accident data.

Index of inter-accident interval	X	$G(r=3)$	Index of inter-accident interval	X	$G(r=3)$	Index of inter-accident interval	X	$G(r=3)$	Index of inter-accident interval	X	$G(r=3)$
61	16		91	30		121	21		151	67	
62	9		92	10		122	19		152	58	
63	34	59	93	1	41	123	36	76	153	4	129
64	23		94	1		124	14		154	28	
65	3		95	8		125	8		155	22	
66	18	44	96	2	11	126	1	23	156	72	122
67	3		97	3		127	98		157	53	
68	13		98	15		128	20		158	43	
69	8	24	99	5	23	129	173	291	159	86	182
70	2		100	6		130	49		160	26	
71	3		101	24		131	15		161	72	
72	38	43	102	13	43	132	40	104	162	43	141
73	1		103	18		133	60		163	35	
74	9		104	48		134	35		164	36	
75	10	20	105	12	78	135	34	129	165	2	73
76	28		106	27		136	66		166	2	
77	36		107	46		137	44		167	68	
78	11	75	108	7	80	138	3	113	168	9	79
79	32		109	7		139	7		169	7	
80	3		110	22		140	39		170	23	
81	5	40	111	2	31	141	0	46	171	9	39
82	7		112	13		142	1		172	20	
83	39		113	14		143	11		173	14	
84	27	73	114	19	46	144	29	41	174	60	94
85	18		115	3		145	11		175	21	
86	3		116	0		146	3		176	11	
87	7	28	117	6	9	147	22	36	177	25	57
88	27		118	14		148	7				
89	2		119	8		149	0				
90	14	43	120	34	56	150	14	21			



資料來自 Lucas(1985)

Applications — 製造工廠意外



- $\bar{\lambda}_0 = 0.0595$
- $\alpha = 0.0027$
- $r=3$
- $UCL=168.6$
 $LCL=4.55$

Figure 8. Gamma chart with $r=3$ for the plant accident data.

- 從129點後很明顯地發生率開始下降
- 結果與Poisson CUSUM chart(Lucas 1985)相似

Conclusions

- 研究監控指數分配TBE的管制圖，Gamma chart樣本統計量為直到觀察到 r th事件為止所需的時間，論證在**小偏移**時，當 **r 增加**，在偵測惡化和改善時，Gamma chart的**敏感性會跟著增加**。
- Gamma chart 參數 $r=4$ 的績效與exponential CUSUM chart最佳設計比較，其優勢包括其較易於設計、評估和執行。

Conclusions

- 此研究論證了基於fixed-shift模型，使用傳統方法來評估ATS會高估Gamma chart 偵測惡化的績效和低估Gamma chart偵測改善的績效。
- 發展一個新的方法基於更實際的random-shift模型，此研究透過Monte Carlo模擬論證了其績效評估更為精確。
- 此研究提出的執行方法是很容易的，其提高了Gamma chart的實用性。

文獻

- Title : Some effective control chart procedures for reliability monitoring

Publication Name : Reliability Engineering and System Safety 77 (2002) 143–150

Author : M. Xie*, T.N. Goh, P. Ranjan

文獻

■ 問題

- c chart使用Poisson分配近似常態分配，但是當不良率很低時這樣的近似就很不適當了，而且通常LCL設為0，無法用來偵測製程改善。
- 指數 TBE 管制圖因為只依據單一觀測值來做決策，有可能會導致高假警報率或因為管制界限太寬導致對製程偏移不敏感。

文獻

■ 方法：Monitoring time between r failures

$$f(t_r, r, \lambda) = \frac{\lambda^r t_r^{r-1}}{(r-1)!} \exp\{-\lambda t_r\} \quad (6)$$

The cumulative Erlang distribution is

$$F(t_r, r, \lambda) = 1 - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\lambda t_r)^k}{k!} \exp\{-\lambda t_r\} \quad (7)$$

$$F(\text{UCL}_r, r, \lambda) = 1 - \sum_{k=0}^{r-1} e^{-\lambda \text{UCL}_r} \frac{(\lambda \text{UCL}_r)^k}{k!} = 1 - \alpha/2 \quad (8)$$

$$F(\text{CL}_r, r, \lambda) = 1 - \sum_{k=0}^{r-1} e^{-\lambda \text{CL}_r} \frac{(\lambda \text{CL}_r)^k}{k!} = 0.5 \quad (9)$$

and

$$F(\text{LCL}_r, r, \lambda) = 1 - \sum_{k=0}^{r-1} e^{-\lambda \text{LCL}_r} \frac{(\lambda \text{LCL}_r)^k}{k!} = \alpha/2 \quad (10)$$

文獻

■ 優勢：

- 更適合用於可靠度監控。
- 可以檢測製程改善，找出其原因將其保留即可持續改善製程。
- 應用於預防維護，告知工作人員何時製程即將偏移，因此可以省下時間和資源。
- t_3 -chart比t-chart在偵測製程惡化時更具敏感性。

研究方向

- 參考”A Cumulative Sum Scheme for Monitoring Frequency and Size of an Event “→ TC-CUSUM

Monitoring time between r failures

+

Size of an Event

- 降低假警報率、提高製程偏移偵測能力