



A New Variable Sampling Control Scheme at Fixed Times for Monitoring the Process Dispersion



- 作者 : Lihui Shi^{1, 2}, Changliang Zou², Zhaojun Wang^{2, *, †} and Kailash C. Kapur¹
- 出處 : QUALITY AND RELIABILITY ENGINEERING INTERNATIONAL
- 報告者 : 謝仁宇
- 指導老師 : 童超塵 教授

- Content
 - Introduction
 - The existing FSR variance charts
 - Control scheme of SEIFT chart
 - The performance assessment
 - Conclusion
-
- **Keywords:** statistical process control; control charts; variable sampling rate charts; sequential sampling

• Introduction (1/3)

- 變動抽樣率（VSR）方法是偵測製程平均數的偏移，但是在管制圖增加VSR的功能來監控製程分散只有被少數學者討論
- 本文使用新的VSR計劃，連續指數加權移動平均方法反常態轉換（EWMA INT (inverse normal transformation)）在固定時間圖（SEIFT圖），用INT統計量整合連續EWMA方法在固定時間，建議同時檢測製程分散的上升和下降
- 每個抽樣時間的樣本大小被允許是變動的

• Introduction (2/3)

- 修華特 R 管制圖、修華特 S^2 管制圖、CUSUM S^2 管制圖、EWMA、INT 和 CUSUM 圖 都是變動管制圖
- 適用於一個固定抽樣率 (FSR) 策略，樣本採用固定抽樣大小 (FSS) 和固定抽樣區間 (FSI)
- VSI和抽樣大小在管制圖被建議改善傳統FSI方法在偵測製程的製程平均數，變動抽樣方法提供更好的績效
- 缺點是時間點在抽取樣本將難以預測，這些抽樣點在製程可能不符合自然循環

• Introduction (3/3)

■ Reynolds, Stoumbos and Reynolds提出

變動抽樣間隔在固定時間 (VSIFT) 作為修改的VSI方法，VSIFT偵測VSI圖並要求樣本在指定的固定時間去降低不可預知的抽樣時間的缺點，當必要時，容許這些額外的樣本在固定時間。

■ Stoumbos和Reynolds

1. 結合變動抽樣計劃在固定時間與連續機率比率試驗
2. 提出連續機率比率試驗在固定時間管制圖 (SPRTFT) 在檢測製程平均數的偏移

表示該管制方案是十分有效和具有重大的管理優勢

■ 本文目標是建立一個變動抽樣管制方法使可以有效監控製程分散的增加和減少

• The existing FSR variance charts (1/5)

- Let $\mathbf{X}_i = (X_{i,1}, X_{i,2}, \dots, X_{i,n})$ for $i = 1, 2, \dots$

代表在第*i*個群組且樣本大小為*n*

- 假設 $\{X_{i,j}\}$ 是獨立和常態分配在 $i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots, n$

- $\delta^+ = \sigma_1^+ / \sigma_0$ 和 $\delta^- = \sigma_1^- / \sigma_0$ 代表製程標準差標準化的增加和減少的值

- σ_1^+ and σ_1^- 代表製程標準差後的增加或減少的值

- 管制計劃的第一型態是基於組變異數的對數變換 S^2

- S^2 EWMA的管制圖(LEWMA)的上邊

$$L_i^+ = (1 - \lambda)L_{i-1}^+ + \lambda \ln s_i^2, \quad i = 1, 2, \dots$$

- S^2 FWMA的管制圖(I FWMA)的下邊

$$L_i^- = (1 - \lambda)L_{i-1}^- + \lambda \ln s_i^2, \quad i = 1, 2, \dots$$

where $L_0^+ = L_0^- = \ln \sigma_0^2$, and σ_0^2 is the IC process variance.

• The existing FSR variance charts (2/5)

■ 第二個管制圖，costa-Mejia et al提出CUSUM圖

$$C_i^+ = \max\{0, C_{i-1}^+ + z_i^2 - nk^+\}, \quad i=1, 2, \dots$$

$$C_i^- = \min\{0, C_{i-1}^- + z_i^2 + nk^-\}, \quad i=1, 2, \dots$$

where $C_0^+ = C_0^- = 0$, and

$$z_i^2 = \sum_{j=1}^n \left(\frac{X_{i,j} - \mu_0}{\sigma_0} \right)^2, \quad k^\pm = \frac{\ln(\delta^\pm)^2}{(1 - 1/(\delta^\pm)^2)}$$

■ 管制方法是來自連續對數可能比率測試(sequential log-likelihood ratio test) 或者連續變動點測試。最後這裡是管制圖研究基於以下INT統計量：

$$Z_i = \Phi^{-1} \left(F_n \left(\frac{ns_i^2}{\sigma_0^2} \right) \right), \quad i=1, 2, \dots$$

■ F_n and $\Phi(\cdot)$ 是卡方分配的CDF和自由度 (DOF) n ，標準常態分配，代表第 i 個組變異數與樣本大小 n

• The existing FSR variance charts (3/5)

$$\text{i.e. } s_i^2 = 1/n \sum_{j=1}^n (x_{i,j} - \mu_0)^2.$$

- Z_i 分配是獨立的樣本大小 n ，當該製程是 IC，我們可以方便處理變動抽樣大小 (VSS) 的案件，管制範圍的選擇將不會受到 n 的影響，所以管制圖可以更加容易設計。
- S_i^2 轉換成 Z_i 的另一個優勢是 Z_i 分配將是對稱的，因此管制圖不僅敏感度增加而且標準差降低，並可以輕易設計
- 得到連續的 $\{Z_i\}$ 後，我們可以用任何方便的方式繪製統計量
- 目標是建立一個變動抽樣管制方法使可以有效監控製程分散的增加和減少

• The existing FSR variance charts (4/5)

■ 第三個管制圖

Acosta-Mejia et al.使用在第 i 個群組的樣本平均值，而不是已知的製程平均數

基於INT統計量調查管制圖績效是必要的，inverse-normal EWMA (IEWMA)管制圖是用來監控股程變異

- 上述3種管制圖，結合 $\ln s^2$ EWMA (LEWMA)管制圖的上邊和下邊，結合CUSUM和IEWMA圖管制圖的上邊和下邊，同時比較他們的績效在監控股程變異數的增加和減少。

• The existing FSR variance charts (5/5)

δ	LEWMA	IEWMA	LEWMA	IEWMA	LEWMA	IEWMA	CUSUM
1.0	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4
1.1	62.6	59.8	74.2	73.4	84.3	85.7	60.3
1.2	21.9	20.4	23.2	22.3	25.5	25.3	20.5
1.3	12.7	11.6	12.1	11.4	12.5	12.1	11.6
1.4	9.02	8.10	8.12	7.52	7.95	7.56	8.02
1.5	7.11	6.28	6.16	5.61	5.84	5.45	6.09
1.6	5.95	5.17	5.03	4.51	4.67	4.29	4.90
1.7	5.17	4.42	4.30	3.80	3.93	3.56	4.10
1.8	4.62	3.89	3.79	3.31	3.43	3.06	3.52
1.9	4.20	3.48	3.42	2.95	3.08	2.70	3.09
2.0	3.87	3.17	3.13	2.76	2.81	2.43	2.76
0.9	85.4	72.8	137.0	111.9	189.9	152.1	66.6
0.8	23.1	20.5	34.7	27.6	53.5	39.6	19.7
0.7	11.0	10.3	13.1	11.1	18.2	14.0	11.1
0.6	6.71	6.70	6.86	6.36	8.11	6.89	7.99
0.5	4.65	4.88	4.34	4.31	4.55	4.25	6.46
0.4	3.43	3.80	3.05	3.22	2.98	3.00	5.58
0.3	2.63	3.07	2.27	2.53	2.14	2.28	5.02
0.2	2.02	2.53	1.82	2.03	1.65	1.96	5.00
0.1	1.61	2.00	1.11	1.94	1.02	1.50	5.00
UCL	0.187	0.620	0.378	0.953	0.525	1.229	26.45
LCL	-0.687	-0.620	-0.978	-0.953	-1.239	-1.229	16.09
λ	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3	0.3	*
k^+	*	*	*	*	*	*	1.193
k^-	*	*	*	*	*	*	0.793

IEWMA圖表比CUSUM圖在
檢測非常小的變異數是
低效率

CUSUM管制圖的下邊在OC
ARL未能持續下降。這是
因為 λ^2 分配是不對稱

顯示沒有一個圖是一致優於其他兩個對手

• Control scheme of SEIFT chart (1/5)

- 提出一個變動抽樣計劃，叫做SEIFT，可以有效地監控製程中分散和具有顯著的管理優勢，也可以輕易地設計和方便執行。
- 基本理念來自SPRT方法，最初發明是Wald，為監測製程平均數，Stoumbos and Reynolds將它應用在SPC

$$U_l = \sum_{i=1}^l (Y_i - k) \quad Y_i = \sqrt{n}(\bar{X}_i - \mu_0)/\sigma_0, k = \sqrt{n}(\mu_1 - \mu_0)/2\sigma_0, \quad \begin{array}{l} \mu_0 \text{ 是替代假設平均數} \\ \mu_1 \text{ 是替代假設之一} \end{array}$$

- U_l 是SPRT的統計量是來自可能對數的比率 (log-likelihood ratio)，SPRT規範要求兩個常數，g和h ($-\infty < g < h < \infty$)，並使用下列規則進行抽樣和決定接受或拒絕虛無假設。
- if $g < U_l < h$ ，就繼續按順序抽樣
- if $U_l \leq g$ ，停止抽樣並接受虛無假設

• Control scheme of SEIFT chart (2/5)

- 為了測試製程中分散的偏移，基於可能比率（likelihood ratio），SPRT可以很容易獲得，但是我們使用雙邊連續EWMA型測試(SEWT)的統計量和相應的抽樣規則：

$$V_l = (1 - \lambda) \cdot V_{l-1} + \lambda \cdot Z_l$$

- if $|v_l| > h$ ，然後停止抽樣和表示信號
- if $g < |v_l| \leq h$ ，繼續連續抽樣，
- if $|v_l| \leq g$ ，停止抽樣和結束在IC的製程

• Control scheme of SEIFT chart (3/5)

- 基於SEWT，SEIFT圖認為有兩種可能的樣本大小 n_1 和 n_2 ($n_1 \leq n_2$) 可在每個抽樣點之中抽樣
- 假設間隔 d_F 兩個固定時間分為子區間長度 $d_s = d_F / \eta$.
- $X_{i,j} = (x_{i,j,1}, x_{i,j,2}, \dots, x_{i,j,n_1(n_2)})$ 表示在第 i 個SEWT的第 j 個小組的 n_1 (n_2) 的觀察值。SEIFT的統計量定義為

$$W_{i,j} = (1 - \lambda) \cdot W_{i,j-1} + \lambda \cdot Z_{i,j}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad j = 1, 2, \dots, N_i$$

where $W_{i,0} = 0$, $Z_{i,j} = \Phi^{-1}(F_{n_l}(n_l s_{i,j}^2 / \sigma_0^2))$, $s_{i,j}^2 = 1/n_p \sum_{k=1}^{n_p} (x_{i,j,k} - \mu_0)^2$, for $p = 1$ or 2 , $i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots, N_i$, and N_i represents the number of the subgroups in the i th SEWT. Its sampling rules are as follows:

• Control scheme of SEIFT chart (4/5)

- N_i 代表第 i 個 SEWT 的群組數目。它的抽樣規則如下：
- if $|W_i, j| > h$ (行動地區)，然後停止抽樣和標示信號；
- if $g < |W_i, j| \leq h$ (警告區)，然後繼續抽樣在間隔 d_s 之後和採用更大的樣本大小 n_2 ；
- if $|W_i, j| \leq g$ (主要地區)，停止抽樣，結束在 IC 製程，並等待到下一個 $(i+1)$ 次的 SEWT，並採用小樣本大小 n_1

• Control scheme of SEIFT chart (5/5)

■ SEIFT圖不同於以前開發的SPRTFT圖，由以下3點：

1. 它是雙邊，因此可以同時檢測製程分散的增加和減少
2. 在EWMA形式試驗統計量是被使用來代替可能對數比率統計量
3. VSS的功能被添加到管制計劃且進一步提高效率

■ SEIFT圖應用到監控製程分散，

- 第一次抽樣時間 t_1 和抽樣大小 n 必須指定，在 $t_1 = d_F$ 和第一次抽樣大小為 $n = n_0$ ， n_0 通常為FSS方法的樣本大小，在應用可能需要有快速反應的問題時可能顯示當管制圖被啟動
- 找到第一個樣本的時間 $t_1 = d_1$ 和第一次抽樣大小為 $n = n_2$
- 所有計算結果是本文的案件中， $t_1 = d_F$ 和 $n = n_0$

• The performance assessment (1/4)

- 穩態ATS(SSATS，定義為預期的時間從偏移的點到管制圖信號的點
- 假設該管制統計量偏移發生的時間已經達到了固定或穩定狀態的分配，SSATS的計算比ATS更為複雜，所以偏移發生的點可能落在兩個抽樣點之間的間隔
- 假設指定的固定時間間隔自由度 $d_F = 1.0$ 。每個管制圖的IC ATS，ANSS和ANOS分別設為等於370.4, 740.8, 3704.0，平均抽樣間隔 = 0.5，平均樣本大小 $n = 5$ 。
- (n_1, n_2) 的兩個組合：(3,10) 和 (2,20)，分別考慮 n_0 在VSR管制圖和在固定時間抽樣的VSR(VSRFT)管制圖。VSI和VSIFT的樣本大小是固定的，都使用 $n=5$
- 任何固定分散偏移，最佳的SSATS以粗體顯示

• The performance assessment (2/4)

Table II. The SSATS comparisons for matched two-sided SEIFT and various EWMA-type VSR charts ($\eta=10$)

δ	SEIFT	VSI	VSIFT	SEIFT	VSR	VSRFT	SEIFT	VSR	VSRFT
1.0	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4
1.1	46.3	44.4	43.6	33.7	32.0	31.0	26.1	26.1	24.7
1.2	8.76	8.91	8.52	6.68	6.78	6.32	6.74	6.68	6.40
1.3	3.50	3.88	3.62	3.13	3.48	3.18	3.82	4.00	3.77
1.4	2.07	2.45	2.25	2.06	2.44	2.18	2.69	2.97	2.75
1.5	1.49	1.83	1.65	1.56	1.92	1.69	2.08	2.40	2.19
1.6	1.19	1.49	1.32	1.26	1.61	1.40	1.69	2.03	1.83
1.7	1.01	1.27	1.12	1.07	1.40	1.20	1.43	1.77	1.57
1.8	0.89	1.11	0.98	0.94	1.24	1.06	1.24	1.58	1.39
1.9	0.81	1.00	0.88	0.84	1.12	0.95	1.10	1.44	1.25
2.0	0.74	0.91	0.80	0.76	1.02	0.86	0.99	1.32	1.13
0.9	83.4	73.5	72.8	53.6	44.8	43.5	36.9	30.7	30.1
0.8	9.46	8.76	8.46	7.33	5.92	5.45	9.85	6.50	6.27
0.7	2.64	2.91	2.71	3.45	2.87	2.58	6.66	3.83	3.62
0.6	1.35	1.70	1.54	2.17	1.94	1.68	4.85	2.65	2.43
0.5	0.90	1.16	1.04	1.37	1.44	1.20	3.37	1.96	1.73
0.4	0.70	0.86	0.77	0.84	1.11	0.90	2.16	1.50	1.28
0.3	0.60	0.71	0.62	0.51	0.86	0.70	1.24	1.19	0.98
0.2	0.53	0.63	0.55	0.40	0.67	0.55	0.62	0.96	0.77
0.1	0.51	0.59	0.52	0.39	0.50	0.43	0.35	0.76	0.60
h	1.0166	1.0306	1.0307	0.985	1.0306	1.0307	0.949	1.0306	1.0306
g	0.1977	0.194	0.2178	0.285	0.3516	0.3513	0.343	0.4548	0.4547
d_1	0.1	0.1	0.1	0.07	0.1	0.0697	0.06	0.1	0.06
d_2	*	1.0	*	*	0.66	*	*	0.58	*
d_F	1.0	*	1.0	0.7	*	0.697	0.6	*	0.6
n	5	5	5	*	*	*	*	*	*
n_1	*	*	*	3	3	3	2	2	2
n_2	*	*	*	10	10	10	20	20	20

• The performance assessment (3/4)

Table III. The SSATS comparisons for matched two-sided SEIFT and various EWMA-type VSR charts ($\eta=5$)

δ	SEIFT	VSI	VSIFT	SEIFT	VSR	VSRFT	SEIFT	VSR	VSRFT
1.0	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4	370.4
1.1	48.0	46.8	46.1	34.5	32.0	32.0	26.5	25.9	25.1
1.2	9.91	10.10	9.76	7.04	6.78	6.74	6.85	6.92	6.57
1.3	4.17	4.53	4.28	3.30	3.48	3.39	3.83	4.12	3.86
1.4	2.49	2.87	2.66	2.13	2.44	2.32	2.67	3.04	2.81
1.5	1.77	2.13	1.93	1.58	1.92	1.79	2.06	2.45	2.23
1.6	1.39	1.72	1.54	1.27	1.61	1.47	1.68	2.07	1.86
1.7	1.16	1.46	1.28	1.08	1.40	1.26	1.42	1.81	1.61
1.8	1.00	1.28	1.11	0.94	1.24	1.11	1.23	1.62	1.42
1.9	0.89	1.14	0.98	0.84	1.12	0.99	1.10	1.47	1.27
2.0	0.81	1.04	0.89	0.77	1.02	0.90	0.99	1.35	1.16
0.9	85.2	77.8	77.7	54.7	44.8	45.2	37.4	31.5	30.8
0.8	11.53	11.13	10.94	7.79	5.92	6.04	9.93	6.73	6.46
0.7	3.56	3.84	3.65	3.61	2.87	2.81	6.57	3.91	3.70
0.6	1.84	2.16	1.98	2.16	1.94	1.81	4.77	2.70	2.49
0.5	1.16	1.46	1.30	1.36	1.44	1.29	3.30	1.99	1.76
0.4	0.86	1.10	0.95	0.86	1.11	0.96	2.12	1.53	1.31
0.3	0.71	0.89	0.75	0.55	0.86	0.74	1.23	1.24	1.01
0.2	0.59	0.75	0.62	0.43	0.67	0.59	0.64	1.02	0.80
0.1	0.54	0.67	0.56	0.43	0.50	0.47	0.40	0.84	0.64
h	1.0200	1.0306	1.0308	0.985	1.0306	1.0307	0.949	1.0306	1.0308
g	0.1810	0.1609	0.1958	0.285	0.3516	0.3513	0.343	0.4548	0.4547
d_1	0.2	0.2	0.2	0.1364	0.2	0.1365	0.119	0.2	0.119
d_2	*	1.0	*	*	0.66	*	*	0.56	*
d_F	1.0	*	1.0	0.682	*	0.683	0.595	*	0.595
n	5	5	5	*	*	*	*	*	*
n_1	*	*	*	3	3	3	2	2	2
n_2	*	*	*	10	10	10	20	20	20

• The performance assessment (4/4)

- SEIFT大部分的值的表現是令人滿意，除了一些小的 δ 值，SEIFT圖優於VSI，VSIFT，VSR和VSRFT圖，保證它是在一個指定的固定時間。
- 很明顯 n 最好是要大才是可行的
- VSS特性是在監測製程變異數時能夠提供更快的檢測小（大）偏移當 $n1/n0$ 較低（較高）和 $n2/n0$ 較高（低），這符合VSR管制圖在Arnold and Reynolds 的結論和VSR管制圖在偵測製程平均數在Lin and Chou的結論
- 上述的抽樣規則另外還有值得注意的一點，我們在VSRFT圖和SEIFT圖之間可以看到的細微差異，在VSRFT圖，統計量的檢驗落在中間地區，繼續積累其當前值在統計量的檢驗。然而對於SEIFT圖，統計量的測試重置為零

• Conclusion (1/1)

- 基於INT統計量和顯示IEWMA管制圖在偵測製程分散中具有良好的檢測能力和可以比較簡單地設計
- 一個新的VSI管制計劃，SEIFT圖，它整合連續EWMA管制計劃在固定時間和INT統計量同時檢測製程變異數的增加和減少。
- 每個抽樣時間的樣本大小可以改變，INT統計量的優點是連續的想法和對稱分配，雙邊管制方案的ATS，ANSS和ANOS可以用馬爾可夫鏈方法進行評估，
- 數值分析表明SEIFT圖在檢測能力比FSR方法提供顯著的改善，相比其他的管制方法，INT統計量的良好績效使SEIFT圖更容易被設計和更方便實踐，可以從它的設計程序看到。此外，從實踐的角度，固定時間抽樣的管制圖被認為是更方便的管理。