



# A Cumulative Sum Scheme for Monitoring Frequency and Size of an Event

出處：Quality and Reliability Engineering International  
DOL:10.1002/que.1076

作者：Zhang Wu,<sup>a\*</sup> Yafen Liu,<sup>b</sup> Zhen He,<sup>b</sup> Michael B.C.<sup>c</sup>  
Khoo

報告學生：田馥華

指導老師：童超塵教授

2010/07/21

# Abstract

- 本文提出一個Cumulative Sum(CUSUM)方案, 稱為TC-CUSUM, 乃是為了監測否定或有危害事件。
- 使用二維馬可夫模型發展之。可同時檢測事件發生的時間區間(T)和大小(C)。
- 研究顯示TC-CUSUM方案比很多現存監控事件管制圖相對更有效, 所以藉由本方案可減少事件的成本和損失。
- 此外, TC-CUSUM的比其他管制圖去察覺T偏移和C偏移更一致, 也就是聯合偏移在T和C。
- TC-CUSUM方案可應用在製程系統, 尤其是其非製程部分。

# Content

- Introduction 4 – 7
- Implementation of the TC-CUSUM scheme 8 – 9
- Design of the TC-CUSUM scheme 10 – 18
- Comparative studies 19 – 28
- Example 29 – 33
- Conclusions 34 – 35

Keywords: quality control; statistical process control;  
Markov chain

# Introduction

- 事件發生將導致否定、有危險或災害的結果。也許是系統故障、交通事故或拒收產品。
- 當轉變偏移在損失方向或更差的情況時，統計製程控制(SPC)通常感興趣在減少T和增加C。
- 事件偏移發生時，使用者必須一有問題即發出警訊，因其可能導致高風險損害。
- 事件大小C是發生事件項目招致的數量，且決定了事件的嚴重性，假設C為離散隨機數。

# Introduction(Cont.)

- SPC監控方案有助於決定為了減少附屬否定事件有關以下兩種錯誤的喪失：
  - (1)實際上仍在控制中,卻太魯莽的增加判斷。
  - (2)情況超出控制時,卻延遲必要判斷與立即行動。
- 現已發明很多管制圖監控事件時間區間 $T$ ,其中包含 $T$ 管制圖、指數管制圖、Gamma管制圖、指數CUSUM管制圖和指數EWMA管制圖。
- 事實上, $T$ 偏移通常伴隨 $C$ 偏移。某時間區間內,事件衝擊不只依賴 $T$ ,也依賴事件大小 $C$ 。管制圖不充分敏感在只注意到 $T$ 偏移,而完全忽視 $C$ 的資訊。



# Introduction(Cont.)

- SPC文獻中，已在努力探勘同時監控T和C的演算法。修華特(Shewhart)管制圖是最近提出用來發現事件大小和時間區間的改變。其中，修華特T&X方案同時運作T管制圖 $LCL_T$ 和X管制圖 $UCL_X$ 。X管制圖用來監控事件大小X，其為連續變數。
- T&X方案檢查T和X比管制圖更有效檢驗T。其似乎相像於 $\bar{X}$ &R結合監控平均數和變異數，但事實上相當不同。X&R結合習慣使用固定抽樣區間，而T&X方案的樣本區間是相當於T的隨機變數。

# Introduction(Cont.)

- 事實上CUSUM管制圖由於線上測量和分配計算系統已成為今日SPC應用的基準。其包含連續樣本點全部的資訊藉由監控累積加總統計量,比修華特管制圖從頭到尾的觀點更有影響力。
- 此篇調查之CUSUM管制圖即TC-SUSUM方案乃是同時監控事件T和C,其T為變數C為屬性。假設T和C為互相獨立。使用二維馬可夫模型來評價TC-SUSUM的Average Time to Signal(ATS)。

# Implementation of the TC-CUSUM scheme

□ TC-SUSUM方案構成由T-SUSUM管制圖監控區間T和C-SUSUM管制圖監控大小C。

□ 更新T-SUSUM的累積加總 $CT_t$ ：

$$CT_0 = 0$$

$$CT_t = \max(0, CT_{t-1} + k_T - T_t)$$

□ 更新C-CUSUM的累積加總 $CC_t$ ：

$$CC_0 = 0$$

$$CC_t = \max(0, CC_{t-1} + C_t - k_c)$$

$T_t$ 和 $C_t$ ：(t)th時間區間T的事件大小C的樣本值



## Implementation of the TC-CUSUM scheme(Cont.)

### □ 實行TC-CUSUM:

- (1)發現事件發生後,在最近與之後發生情況中找出時間區間 $T$ ,並且計算本例大小 $C$ 。
- (2)更新 $CT_t$ 和 $CC_t$ 。
- (3)如果 $CT_t \leq h$ 和 $CC_t \leq h$ 製程在管制內時,回到步驟一等待下一次事件發生。
- (4)否則( $CT_t > h$ 和 $CC_t > h$ )製程在管制外,減少 $T$ 增加 $C$ 。TC-CUSUM產生超控信號,立即停止製程進行調查。

## Design of the TC-CUSUM scheme(Cont.)

- Design specifications
- Design objective
- Design procedure

# Design specifications

- 設計TC-CUSUM, 需決定以下三種規格:
  - (1)ATS<sub>0</sub>可允許的最小值 $T$ 。
  - (2) $T$ 機率分配管制內參數值。其假設 $T$ 服從指數分配, 分配參數 $\lambda$ 是 $T$ 平均值的倒數。從管制內 $T$ 之樣本平均估計管制內值 $\lambda_0$ 。
  - (3) $C$ 機率分配管制內參數值。其假設 $C$ 服從Poisson分配, 參數 $g$ 是 $C$ 的平均值。蒐集管制內歷史資訊估計 $g_0$ 。

# Design objective

- 最小化超出控制的 $ATS_1$ ，管制內之 $ATS_0$ 不能小於 $\tau$ 。
- 比較兩管制圖在有興趣的區域過程偏移點整體成果來檢驗 $ATS_1$ 值，如果一個圖有較小較多點的 $ATS_1$ ，這圖的比其他圖來的更有效。這層面的比較可公式化表示：

Average Ratios(AR)

$$AR = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{ATS(\delta_{g,i}, \delta_{\lambda,i})}{ATS_{bench}(\delta_{g,i}, \delta_{\lambda,i})}}{m}$$

- 顯然，如果圖AR值大於1，此圖相對沒效率比在偏移區域基準圖。

# Design objective(Cont.)

- 平均損失AL也是被提出可以用來測量管制圖之整體成果。C和T的比值R反映事件發生招致損害的比率。預測值R能用以下的數學方法計算之：

$$\begin{aligned} E(R) &= E(C/T) = \sum_{C=0}^{\infty} \left\{ \left[ \int_0^{\infty} \frac{C}{T} f_T(T) \cdot dT \right] \cdot p_C(C) \right\} \\ &= \sum_{C=0}^{\infty} \left\{ \left[ \int_0^{\infty} \frac{C}{T} \cdot \lambda e^{-\lambda T} \cdot dT \right] \cdot \frac{e^{-g} g^C}{C!} \right\} = \lambda g \cdot \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda T}}{T} \cdot dT \end{aligned}$$

- E(R)表示單位時間損失，管制外事件總損失等於E(R) ×ATS。如果在一個偏移範圍考慮所有不同E(R) ×ATS。如果考慮偏移區域全部  $\delta_{\lambda}$  和  $\delta_g$  不同結合，AL可得到藉由：

$$AL = \frac{\sum_{i=1}^m (E(R(\delta_{g,i}, \delta_{\lambda,i})) \cdot ATS(\delta_{g,i}, \delta_{\lambda,i}))}{m}$$



# Design objective(Cont.)

- 如果管制圖有較小的AL值, 管制外每點( $\delta_\lambda, \delta_g$ )的ATS值一般比其他圖小。
- 測量AL在AR的比較有其下兩個優點:
  - (1)AL表示更廣泛的測量管制圖績效, 因其考慮關於損失的全部因素。
  - (2)計算AL不需事先決定基準圖。
- 因此, 使用AL當設計TC-CUSUM的目標函數。最小化AL將直接減少管制外事件招致的損失或成本。

# Design procedure

- 定義T和C偏移區域  $\delta_\lambda, \delta_g$ 。

$$1 \leq \delta_\lambda \leq \delta_{\lambda, max}, \quad 1 \leq \delta_g \leq \delta_{g, max}$$

- TC-CUSUM 方案設計分配T-和C-CUSUM管制圖的檢測能力透過分配因素  $\theta$  ( $0 < \theta < 1$ )。詳細  $\tau$  成分  $\tau_T$  和  $\tau_C$  決定藉由  $\theta$ ：  
 $\tau_T = \tau / \theta$

$$\tau_C = \tau / (1 - \theta)$$

- 如果T-和C-SUSUM管制內的值  $ATS_{0,T}$  和  $ATS_{0,C}$  等於  $\tau_T$  和  $\tau_C$ ，全部  $ATS_0$  近似等於  $\tau$ 。

$$ATS_0 \approx \frac{1}{\frac{1}{ATS_{0,T}} + \frac{1}{ATS_{0,C}}} = \frac{1}{\frac{1}{\tau_T} + \frac{1}{\tau_C}} = \frac{1}{\frac{\theta}{\tau} + \frac{1-\theta}{\tau}} = \tau$$

# Design procedure(Cont.)

□ 整個TC-CUSUM的設計過程如下：

- (0) 決定三種規格：可允許管制內 $ATS_0$ 最小值( $\tau$ )、T分配參數值( $\lambda_0$ )、C平均值( $g_0$ )。
- (1) 初始化變數 $AL_{min}$ 當一個非常大的數， $AL_{min}$ 被使用來儲存AL最小值。
- (2) 在 $0 < \theta < 1$ 範圍內尋找最小化目標函數AL最佳值 $\theta$ 。
  - (2.1) 使用計算 $\tau_T$ 和 $\tau_C$ 。
  - (2.2) 在純粹T偏移上為了最小化AL值尋找涉及參數最佳值 $k_T$ 。
  - (2.3) 在純粹C偏移上為了最小化AL值尋找涉及參數最佳值 $k_C$ 。

# Design procedure(Cont.)

- (2.4) 初步TC-CUSUM方案用管制圖參數 $k_T, k_C, h_T, h_C$ 建立。分別用T-CUSUM管制圖和C-CUSUM管制圖設計在(2.2), (2.3)組成。
  - (2.5) 全部的管制圖參數決定後, 使用方程式計算其平均損失AL在整個偏移區域。
  - (2.6) 如果計算的AL小於正確的 $AL_{min}$ , 把後面的放回去然後儲存正確值 $k_T, h_T, k_C, h_C$ 為臨時最佳解。
- (3) 最後在滿足TC-CUSUM最小化AL和 $ATS_0 = \tau$ 的限制下, 尋找最佳 $\theta$ 。完成一致最佳值 $k_T, h_T, k_C, h_C$ 。

# Design procedure(Cont.)

**Table I. ATS values of four control charts**

$\delta_\lambda$	Chart	$\delta_g$					
		1.00	1.76	2.52	3.29	4.05	4.81
6.00	T	301.4	301.4	301.4	301.4	301.4	301.4
	T&C	385.6	123.5	37.6	21.8	17.9	16.9
	T-CUSUM	89.3	89.3	89.3	89.3	89.3	89.3
	TC-CUSUM	100.4	66.0	35.6	25.0	20.1	17.8
5.00	T	428.0	428.0	428.0	428.0	428.0	428.0
	T&C	543.0	154.1	45.4	26.2	21.5	20.3
	T-CUSUM	114.0	114.0	114.0	114.0	114.0	114.0
	TC-CUSUM	128.1	80.6	42.7	30.0	24.1	21.3
4.00	T	659.3	659.3	659.3	659.3	659.3	659.3
	T&C	824.6	200.9	57.0	32.8	26.9	25.4
	T-CUSUM	157.6	157.6	157.6	157.6	157.6	157.6
	TC-CUSUM	177.1	103.1	53.5	37.6	30.1	26.7
3.00	T	1155.5	1155.5	1155.5	1155.5	1155.5	1155.5
	T&C	1408.6	280.0	76.4	43.7	35.9	33.9
	T-CUSUM	254.7	254.7	254.7	254.7	254.7	254.7
	TC-CUSUM	286.8	141.9	71.4	50.1	40.1	35.6
2.00	T	2562.3	2562.3	2562.3	2562.3	2562.3	2562.3
	T&C	2964.0	440.5	115.2	65.6	53.8	50.8
	T-CUSUM	625.6	625.6	625.6	625.6	625.6	625.6
	TC-CUSUM	713.4	221.3	107.3	75.2	60.2	53.3
1.00	T	10000.0	10000.0	10000.0	10000.0	10000.0	10000.0
	T&C	10000.0	921.2	230.6	131.1	107.6	101.6
	T-CUSUM	9999.3	9399.4	9399.4	9399.4	9399.4	9399.4
	TC-CUSUM	9944.3	449.6	214.0	150.0	120.3	106.7



# Comparative studies

## ■ 四個有效管制圖之比較：

### (1) T管制圖：

一個察覺廣闊T偏移的修華特管制圖。察覺減少T偏移, T管制圖LCL<sub>T</sub>決定由：

$$LCL_T = -\frac{\ln(1-\alpha)}{\lambda_0} \quad \alpha = \frac{1}{\lambda_0 \cdot \tau}$$

型I錯誤率 $\alpha$ 依賴管制內的ATS<sub>0</sub>明確值 $\tau$ 。

### (2) T&C管制圖：

T&C的結合也是一個修華特管制圖。為了

察覺減少T偏移和增加C偏移執行T管制圖。

# Comparative studies(Cont.)

T&C管制圖將產生管制外的警訊，設計T&C管制圖整個型 I 錯誤率  $\alpha$  分配透過分配因子  $\theta$  ( $0 < \theta < 1$ )。成分  $\alpha_C$  和  $\alpha_T$ ，型 I 錯誤率  $\alpha$  決定

由

$$\alpha_C = \theta\alpha \quad \alpha_T = \frac{\alpha(1-\theta)}{1-\theta\alpha}$$

然後給定  $\alpha_C$  和  $\alpha_T$ ， $LCL_T$  和  $UCL_C$  決定由：

$$LCL_T = -\frac{\ln(1-\alpha_T)}{\lambda_0} \quad UCL_C = F_C^{-1}(1-\alpha_C)$$

# Comparative studies(Cont.)

## (3) T-CUSUM 管制圖：

監控事件的時間區間  $T$ 。決定最佳結合這提及參數  $kT_c$  和管制界限  $h_T$ ，最小化超過  $T$  偏移區域  $AL$  值而且其管制內  $ATS_0$  等於  $\tau$ 。注意，T-CUSUM 只敏感在  $T$  偏移。

## (4) TC-CUSUM 管制圖：

為本文章所推薦之。

# Comparative studies(Cont.)

## ■ 使用TC-CUSUM:

$$\tau = 10000, \quad \lambda_0 = 0.01, \quad g_0 = 4 \quad \text{時,}$$

$$1 \leq \delta_\lambda \leq 6, \quad 1 \leq \delta_g \leq 4.81$$

四個管制圖參數：

T chart:  $LCL_T = 1.0050$

T&C chart:  $LCL_T = 0.7207, \quad UCL_C = 10$

T-CUSUM chart:  $k_T = 64.1667, \quad h_T = 219.5547$

TC-CUSUM scheme:  $k_T = 64.2600, \quad h_T = 254.5791, \quad k_C = 4.8875, \quad h_C = 8.9951$

# Comparative studies(Cont.)

- Table I 注意到以下有趣的地方：
  - (1) 當製程在控制內，四個管制圖產生相同的 $ATS_0$ 值，全部非常接近  $\tau$ 。保證在這些圖表中比較是公平的。
  - (2) T管制圖是最沒效率的。ATS在T管制圖中同列其值相同，其完全不敏感對於C偏移。顯然，T管制圖是不能勝任監控事件的工具，尤其在T偏移伴隨大小C的偏移時。
  - (3) T&C結合更優於T管制圖。除了T偏移外，T&C的ATS值比T管制圖一致是值得注意的。



# Comparative studies(Cont.)

- (4) T-CUSUM的ATS值小於T管制圖。表示CUSUM的特色是有效增加事件監控的察覺力。然而,像T管制圖,忽略C偏移資訊,因此它在C偏移存在時不顯著的。
- (5) TC-CUSUM方案不只有察覺T和C偏移的能力,也有全部連續樣本點資訊的優點。所以有相當的能力在察覺不同類型和巨大偏移。其優於T管制圖, T-CUSUM管制圖。

# Comparative studies(Cont.)

- 為了達到全面性的績效比較。計算Table I四個圖表整個偏移區域的AR值和AL值,其結果RUN 0放入Table II。使用TC-CUSUM管制圖AR值當作基準。三個範圍的AR值計算如下:

Region 1 ( $\delta_\lambda=1$  和  $\delta_g>1$ ) :  $AR_C(m=5)$

Region 2 ( $\delta_\lambda>1$  和  $\delta_g=1$ ) :  $AR_T(m=5)$

Region 3 ( $\delta_\lambda>1$  和  $\delta_g>1$ ) :  $AR_{T+C}(m=25)$

# Comparative studies(Cont.)

- 從 RUN 0 發現幾乎  $AR_C, AR_T,$  和  $AR_{T+C}$  值都大於 1, 表示 TC-CUSUM 方案幾乎勝過其他管制圖。
- AR 和 AL 值顯示 TC-CUSUM 方案勝過全部其他事件監控的管制圖。
- Run 0 中的  $AL/AL_{TC-CUSUM}$  表示 TC-CUSUM 比起 T, T&C, T-CUSUM 管制圖有效。
- 當  $T$  和  $\lambda_0$  很大時, TC-CUSUM 顯著優於其他管制圖。 $g_0$  的影響不顯著。

Table II. Values of AR and AL of control charts

RUN	$\tau$	$\lambda_0$	$g_0$	Chart	$AR_C$	$AR_T$	$AR_{T+C}$	AR	AL	$AL/AL_{TC-CUSUM}$
0	10 000	0.010	4	T	62.498	3.537	19.045	23.037	1243.23	21.4278
				T&C	1.169	4.360	1.145	1.608	107.69	1.8561
				T-CUSUM	58.745	0.887	4.708	11.882	659.75	11.3711
				TC-CUSUM	1.000	1.000	1.000	1.000	58.02	1.000
1	5000	0.003	2	T	11.095	1.253	4.237	4.790	131.64	4.9653
				T&C	0.970	2.287	0.982	1.166	30.42	1.1473
				T-CUSUM	9.450	0.880	2.929	3.568	98.09	3.6997
				TC-CUSUM	1.000	1.000	1.000	1.000	26.51	1.000
2	5000	0.003	8	T	14.063	1.220	5.333	5.992	526.57	6.0700
				T&C	1.044	1.388	1.040	1.090	94.58	1.0902
				T-CUSUM	11.978	0.857	3.684	4.465	392.35	4.5228
				TC-CUSUM	1.000	1.000	1.000	1.000	86.75	1.000
3	5000	0.030	2	T	47.930	4.354	14.796	18.038	625.26	17.9936
				T&C	1.392	8.335	1.552	2.498	92.18	2.6527
				T-CUSUM	45.620	0.827	2.776	8.618	329.40	9.4794
				TC-CUSUM	1.000	1.000	1.000	1.000	34.75	1.000
4	5000	0.030	8	T	91.421	4.356	27.382	33.241	2501.06	29.7129
				T&C	1.290	5.199	1.235	1.809	201.70	2.3962
				T-CUSUM	87.014	0.827	5.134	16.216	1317.60	15.6533
				TC-CUSUM	1.000	1.000	1.000	1.000	84.17	1.000
5	20 000	0.003	2	T	36.248	2.485	11.457	13.717	465.98	13.2332
				T&C	1.269	3.005	1.243	1.499	55.44	1.5743
				T-CUSUM	33.225	0.868	3.927	7.676	262.99	7.4684
				TC-CUSUM	1.000	1.000	1.000	1.000	35.21	1.000
6	20 000	0.003	8	T	53.096	2.559	16.594	19.804	1863.94	18.7272
				T&C	1.076	2.979	1.068	1.342	149.04	1.4974
				T-CUSUM	48.668	0.894	5.686	11.141	1051.94	10.5690
				TC-CUSUM	1.000	1.000	1.000	1.000	99.53	1.000
7	20 000	0.030	2	T	145.060	12.821	43.788	53.831	2471.26	52.6760
				T&C	2.083	24.309	2.492	5.550	279.62	5.9602
				T-CUSUM	142.175	0.858	2.931	22.527	1181.12	25.1761
				TC-CUSUM	1.000	1.000	1.000	1.000	46.91	1.000
8	20 000	0.030	8	T	290.222	11.873	84.904	103.802	9885.03	88.0362
				T&C	1.926	13.290	1.807	3.464	608.24	5.4170
				T-CUSUM	284.450	0.794	5.683	44.808	4724.47	42.0762
				TC-CUSUM	1.000	1.000	1.000	1.000	112.28	1.000
					$AR_C$	$AR_T$	$AR_{T+C}$	AR	AL	$AL/AL_{TC-CUSUM}$
T					83.515	4.940	25.282	30.695	2190.44	28.094
T&C					1.358	7.239	1.396	2.225	179.88	2.621
T-CUSUM					80.147	0.855	4.162	14.545	1113.08	14.446
TC-CUSUM					1.000	1.000	1.000	1.000	64.90	1.000

# Comparative studies(Cont.)

**Table III. Charting parameters of the four control charts**

RUN	$\tau$	$\lambda_0$	$g_0$	Chart	$LCL_T$	$UCL_C$	$k_T$	$h_T$	$k_C$	$h_C$
0	10 000	0.010	4	T	1.0050					
				T&C	0.7207	10.0000				
				T-CUSUM			64.1667	219.5547		
				TC-CUSUM			64.2600	254.5791	4.8875	8.9951
1	5000	0.003	2	T	22.9976					
				T&C	4.9677	4.0000				
				T-CUSUM			245.0000	434.7077		
				TC-CUSUM			233.3333	535.7133	2.6688	2.8430
2	5000	0.003	8	T	22.9976					
				T&C	17.1951	14.0000				
				T-CUSUM			245.0000	434.7077		
				TC-CUSUM			233.3333	561.9553	10.6750	3.2935
3	5000	0.030	2	T	0.2230					
				T&C	0.0715	6.0000				
				T-CUSUM			21.3889	82.8460		
				TC-CUSUM			20.9611	100.0240	2.5117	7.4327
4	5000	0.030	8	T	0.2230					
				T&C	0.1698	17.0000				
				T-CUSUM			21.3889	82.8460		
				TC-CUSUM			21.3803	103.4928	8.9770	14.1851
5	20 000	0.003	2	T	5.6024					
				T&C	4.0877	6.0000				
				T-CUSUM			221.6667	666.4162		
				TC-CUSUM			210.0000	737.8342	2.6688	4.9945
6	20 000	0.003	8	T	5.6024					
				T&C	4.3607	16.0000				
				T-CUSUM			221.6667	666.4162		
				TC-CUSUM			214.2000	731.2887	10.6750	6.3017
7	20 000	0.030	2	T	0.0556					
				T&C	0.0190	7.0000				
				T-CUSUM			21.0000	111.7810		
				TC-CUSUM			21.0000	133.4679	2.5464	10.1149
8	20 000	0.030	8	T	0.0556					
				T&C	0.0472	19.0000				
				T-CUSUM			21.0000	111.7810		
				TC-CUSUM			21.0000	140.6948	8.9770	19.6748

# Comparative studies(Cont.)

- 計算  $AR, AL, AL/AL_{TC-CUSUM}$  。
- $AL/AL_{TC-CUSUM}$  表示從廣泛的觀點來說，TC-CUSUM 比起 T, T&C 和 T-CUSUM 管制圖更有效。
- TC-CUSUM 證明完成平衡有效察覺 T 和 C 聯合偏移唯一效力的強勢 T。績效是良好的遍及整個偏移區域。
- T-CUSUM 只對只是有效的對於 T 偏移, 但對於 C 偏移不敏感。而 T&C 管制圖只較具檢測力對於 C 偏移, 但相當不敏感對於 T 偏移。



# Example

- 市政府發展一個SPC工具去監控災難意外的發生,可以幫助決定何時應該實行及時加強活動, $T$ 是連續意外的時間區間,而 $C$ 是發生的死亡損失。記錄某期間25個意外發生的 $t_i$ 和 $c_i$ ,情況服從常態分配(管制內),發現 $T$ 服從指數分配而 $C$ 服從Poisson分配,紀錄中分配管制內參數估計:

$$g_0 \approx \bar{C} = \frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_{25}}{25} = 4.0400$$

$$\lambda_0 \approx \frac{1}{\bar{T}} = \frac{1}{(t_1 + t_2 + \cdots + t_{25})/25} = 0.0112$$



# Example(Cont.)

- $\lambda_0$ 表示平均每89.3小時(3.72天)的意外發生,  $T=8760$ 小時(1年)。市政府主要關心的是意外頻率的增加和每次發生的死亡人數, 損失率  $C/T$ 。
- 研究四個管制圖, 事件管制參數的決定列於以下:

T chart:  $LCL_T = 0.9067$

T&C chart:  $LCL_T = 0.6345, UCL_C = 10$

T-CUSUM chart:  $k_T = 57.0415, h_T = 194.2477$

TC-CUSUM scheme:  $k_T = 56.0044, h_T = 225.3478, k_C = 4.8606, h_C = 8.8424$

# Example(Cont.)

Table IV. Sample data of $T$ and $C$ in the example		
No.	$t_i$ (h)	$c_j$ (death toll)
1	51.2	2
2	42.9	1
3	85.1	5
4	61.0	6
5	0.5	5
6	22.1	7
7	105.3	5
8	35.1	5
9	130.2	2
10	248.0	4
11	14.3	6
12	305.4	5
13	123.6	3
14	45.1	2
15	68.3	1
16	6.0	2
17	77.6	5
18	25.1	6
19	207.1	6
20	244.6	4
21	20.8	1
22	90.5	2
23	96.5	5
24	61.6	6
25	54.5	5

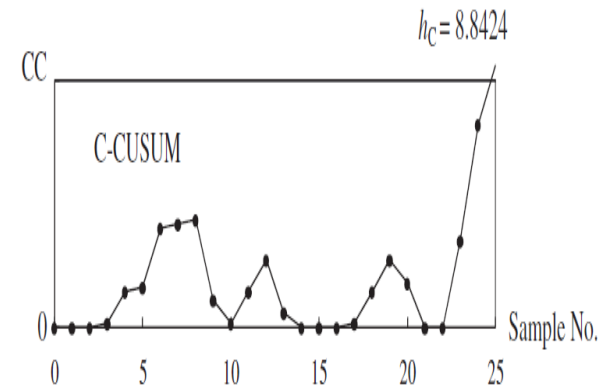
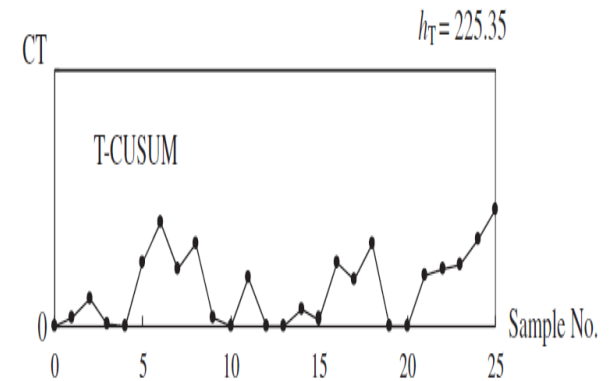
# Example(Cont.)

**Table V.** *ATS* values of the four control charts in the example

$\delta_\lambda$	Chart	$\delta_g$					
		1.00	1.74	2.48	3.21	3.95	4.69
6.00	T	264.3	264.3	264.3	264.3	264.3	264.3
	T&C	344.1	111.7	34.4	19.8	16.1	15.1
	T-CUSUM	79.0	79.0	79.0	79.0	79.0	79.0
	TC-CUSUM	90.9	59.3	32.0	22.5	18.0	15.9
5.00	T	375.3	375.3	375.3	375.3	375.3	375.3
	T&C	484.1	139.5	41.5	23.7	19.3	18.1
	T-CUSUM	100.9	100.9	100.9	100.9	100.9	100.9
	TC-CUSUM	116.2	72.4	38.4	27.0	21.6	19.1
4.00	T	578.0	578.0	578.0	578.0	578.0	578.0
	T&C	734.2	181.9	52.1	29.7	24.1	22.7
	T-CUSUM	139.5	139.5	139.5	139.5	139.5	139.5
	TC-CUSUM	161.2	92.7	48.1	33.8	27.1	23.9
3.00	T	1012.8	1012.8	1012.8	1012.8	1012.8	1012.8
	T&C	1251.4	253.8	69.9	39.6	32.2	30.2
	T-CUSUM	225.5	225.5	225.5	225.5	225.5	225.5
	TC-CUSUM	262.6	127.6	64.2	45.1	36.1	31.8
2.00	T	2245.4	2245.4	2245.4	2245.4	2245.4	2245.4
	T&C	2622.5	399.5	105.4	59.5	48.2	45.3
	T-CUSUM	553.3	553.3	553.3	553.3	553.3	553.3
	TC-CUSUM	664.2	198.7	96.5	67.6	54.1	47.8
1.00	T	8760.0	8760.0	8760.0	8760.0	8760.0	8760.0
	T&C	8760.0	836.2	211.2	118.8	96.4	90.6
	T-CUSUM	8756.8	8227.4	8227.4	8227.4	8227.4	8227.4
	TC-CUSUM	8780.6	403.5	192.5	135.0	108.2	95.5

# Example(Cont.)

- 四個管制圖ATS值展示在Table V。比較四個管制圖的相對影響力都幾乎相同。過程開始在管制內的情況，而統計CT和CC通常縮短接近或維持在0。
- 聯合偏移( $\delta_\lambda=1.7, \delta_g=1.6$ )發生在樣本20到21之間，兩個管制圖後來的樣本點增加且漸漸趨向0。最後，C-CUSUM管制圖的樣本點25勝過管制界限 $h_c$ 表示超出管制狀態。



# Conclusions

1. 事件監控管制圖使用在製程與非製程部分。
2. 此文章提出TC-CUSUM方案為了同步監控否定事件的頻率跟大小。CUSUM方案在合理、設計、作業和估計成果方面檢測細節。
3. TC-CUSUM方案明顯勝過很多其他事件監控SPC管制圖包含T管制圖、T&C管制圖、T-CUSUM管制圖。
4. TC-CUSUM方案有高度檢測影響力可歸因於其有能力使用全部可能的資訊,包含:
  - (1) 時間區間T和大小C的資訊。
  - (2) 以前一系列的樣本點或事件歷史。
5. 除了高度檢測影響力,同時敏感在T和C的偏移也是TC-USUM方案的價值。



# Conclusions(Cont.)

6. 此文章也發現一個二維馬可夫模型去估計TC-CUSUM方案的ATS。此外,平均損失AL是在當目標函數被設計時,事件監控測量整個行為管制圖。
7. 假設時間區間T服從指數分配,而事件大小C服從Poisson分配。感興趣在實行更進一步的研究在TC-CUSUM方案,其T和C服從其他機率分配,C是連續函數,或T和C彼此依賴。
8. 如果難以定義應用適合的理論分配,能使用非參數近似去估計現有資料的分配密度函數和累積分配函數。
9. 全部這些方法因為TC-CUSUM有的高影響力,而不是因為特殊的機率分配得到,TC-CUSUM能良好的實行之。