



國立雲林科技大學工業工程與管理所

Graduate school of Industrial Engineering & Management,
National Yunlin University of Science & Technology

系統可靠度實驗室 System Reliability Lab.
<http://campusweb.yuntech.edu.tw/~qre/index.htm>

The extended GWMA control chart



出處：Quality Engineering, 2008 Copyright *Taylor & Francis Group, LLC* DOI:10.1080/08982110802334120

作者：Shey-Huei Sheu* and Yu-Tai Hsieh

報告學生：田馥華

指導老師：童超塵教授

Abstract

- 藉由模擬雙指數加權移動平均(DEWMA)擴展一般加權移動平均(GWMA)管制圖。其建議使用圖表稱為**雙一般加權移動平均(DGWMA)管制圖**。
- 評估模擬GWMA、DEWMA和DGWMA管制圖平均運行長度(ARL)特色。
- 通常DGWMA管制圖在檢測一個**0.5**和**1.5**標準差間的平均中偏移過程轉變的時間變化管制界線**較**DEWMA和GWMA管制圖**敏感**。GWMA管制圖在平均偏移低於**0.5**標準差進行更好，而DEWMA在平均偏移高於**1.5**標準差進行更好。
- 討論DGWMA管制圖的設計。

Content

- Introduction
- The GWMA control chart
- The DGWMA control chart
- Some special cases
- Performance measurement and comparison
- ARL profiles of the DGWMA control chart
- Example
- Conclusions

Keywords: GWMA control chart; DGWMA control chart; DEWMA control chart; average run length; time-varying control limits

Introduction(1/2)

Roberts	首先介紹幾何移動平均(GMA)管制圖的過程管制。
Robinson和Ho	提出數值程序在ARLs GMA管制圖的製表。
Hunter	提出管制圖應用技術，稱為指數加權移動平均(EWMA)管制圖 EWMA的幾項研究也已被報告。
Crowder	決定最佳參數設計權術和Nomogram管制圖的管制界線寬度。
Lucas和 Saccucci	提出快速初步反應指數EWMA(FIREWMA)與最初幾個觀察值的進一步縮小可以提高EWMA管制圖的性能的管制界限。
Steiner	利用FIR監測在事先管制信號外立即反應並得出其結論EWMA 管制圖時間變化管制界線在檢測啟動品質問題較敏感。

Introduction(2/2)

Sheu and Griffith, Sheu
and Sheu and Lin

發展和實施擴大EWMA管制圖，稱為一般加權移動平均(GWMA)管制圖。其更敏感在檢測過程中的小偏移，而且由於加入調整參數 α 可以點出在最初過程中的小偏移也顯示綜合修華特GWMA管制圖有/無運行規則比GWMA管制圖在偵測小偏更移敏感。

Zhang 和 Chen

擴大EWMA管制圖的雙指數加權移動平均(DEWMA)管制圖也顯示了DEWMA比EWMA管制小平均偏移具有更好的性能。

The GWMA control chart(1/4)

- 過去資料的移動平均，每個資料點分配一個權重。其中獨立樣本的順序，設M代表直到事件A發生的樣本數(先前發生的事件設為A)。

$$\sum_{m=1}^{\infty} P(M = m) = P(M = 1) + P(M = 2) + \cdots + P(M = t) + P(M > t) = 1.$$

- 設X是一個過程的品質特性。假設已收集的樣本大小n，假定 X_{it} ， $i = 1, 2, \dots, n$ 是時間t獨立隨機抽樣平均數為 $\mu + \delta$ ，變異數為 σ^2 的每個點， $t = 1, 2, \dots$ 。
- $\delta = 0$ 表示該過程仍在控制中。否則，過程改變或偏移。
- \bar{X}_t ， $t = 1, 2, \dots$ ，平均 $\mu + \delta$ 和變異數 σ^2/n 是獨立隨機變數。

The GWMA control chart(2/4)

- GWMA統計定義為，設起始值 G_0 ，通常 $G_0 = \mu$ 。

$$\begin{cases} G_t = P(M = 1)\bar{X}_t + P(M = 2)\bar{X}_{t-1} + \cdots + P(M = t)\bar{X}_1 + P(M > t)\mu, \\ G_0 = \mu, \end{cases} \quad (1)$$

$$t = 1, 2, \dots$$

- 公式(1)的期望值計算

$$\begin{aligned} E(G_t) &= E(P(M = 1)\bar{X}_t + P(M = 2)\bar{X}_{t-1} + \cdots + P(M = t)\bar{X}_1 + P(M > t)\mu) \\ &= \sum_{j=1}^t P(M = j) E(\bar{X}) + P(M > t)\mu = \mu. \end{aligned}$$

The GWMA control chart(3/4)

■ 公式變異數

$$\begin{aligned}\text{Var}(G_t) &= \text{Var} (P(M = 1)\bar{X}_t + P(M = 2)\bar{X}_{t-1} + \cdots + P(M = t)\bar{X}_1 + P(M > t)\mu) \\ &= \sum_{j=1}^t P^2(M = j)\text{Var}(\bar{X}) = Q_t \frac{\sigma^2}{n}, \quad Q_t = \sum_{j=1}^t P^2(M = j)\end{aligned}$$

- GWMA管制圖的CL、UCL、LCL。其L定義為管制界線的寬度。

$$\text{UCL} = \mu + L\sqrt{\frac{Q_i}{n}}\sigma,$$

$$\text{CL} = \mu,$$

$$\text{LCL} = \mu - L\sqrt{\frac{Q_i}{n}}\sigma.$$

The GWMA control chart (4/4)

- 每當 G_t 不屬於管制範圍限制內時此過程被認為超控，應採取一些行動。為了方便計算 $P(M > t) = q^{t^\alpha}$ 被選擇。

$$P(M = t) = P(M > t - 1) - P(M > t) = q^{(t-1)^\alpha} - q^{t^\alpha}$$

$$t = 1, 2, \dots, 0 < q < 1 \text{ and } 0 < \alpha \leq 1$$

- 設計參數 Q 是常數， α 是調整參數。因此，GWMA管制圖的**權重**是一個**遞減序列**。
- (Roberts)當 $\alpha=1$ 時GWMA統計值是相同的。
- EWMA管制圖的特殊情況下成為了GWMA管制圖。GWMA因子 G_t 在方程式(1)記為 $GWMA(q, \alpha)$ 。相對應的EWMA統計值記為 $EWMA(1 - q)$ 。

The DGWMA control chart(1/5)

- DGWMA統計值定義為

$$\begin{cases} Y_t = P(M_2 = 1)G_t + P(M_2 = 2)G_{t-1} + \cdots + P(M_2 = t)G_1 + P(M_2 > t)\mu, \\ Y_0 = \mu, \end{cases} \quad (2) \quad t = 1, 2, \dots$$

- G_t 是方程式 (1) 中的 GWMA 統計值，加權序列 $\{P(M_1=t)\}$ 。設置起始值 $Y_0=\mu$ ， Y_t 也是另一種 GWMA 統計值加權序列 $\{P(M_2 = t)\}$ ，用 \bar{X}_t 取代 G_t 。

$$\begin{aligned} Y_t &= P(M_2 = 1)G_t + P(M_2 = 2)G_{t-1} + \cdots + P(M_2 = t)G_1 + P(M_2 > t)\mu \\ &= W_1\bar{X}_t + W_2\bar{X}_{t-1} + \cdots + W_t\bar{X}_1 + \left(1 - \sum_{i=1}^t W_i\right)\mu, \end{aligned}$$

The DGWMA control chart (2/5)

$$W_t = P(M_1 = 1)P(M_2 = t) + P(M_1 = 2)P(M_2 = t - 1) + \cdots + P(M_1 = t)P(M_2 = 1)$$

$$= \sum_{j=1}^t P(M_1 = j)P(M_2 = t - j + 1). \quad (3)$$

- W_t 是 \bar{X}_t 的新權重，由加權序列 $\{P(M_1 = t)\}$ 和 $\{P(M_2 = t)\}$ 組成。
- 公式(2)的期望值可以計算如下

$$E(Y_t) = E \left(W_1 \bar{X}_t + W_2 \bar{X}_{t-1} + \cdots + W_t \bar{X}_1 + \left(1 - \sum_{i=1}^t W_i \right) \mu \right)$$

$$= \sum_{i=1}^t W_i \cdot E(\bar{X}) + \left(1 - \sum_{i=1}^t W_i \right) \mu$$

$$= \mu.$$

The DGWMA control chart (3/5)

■ 變異數

$$\begin{aligned}\text{Var}(Y_t) &= \text{Var}\left(W_1\bar{X}_t + W_2\bar{X}_{t-1} + \cdots + W_t\bar{X}_1 + \left(1 - \sum_{i=1}^t W_i\right)\mu\right) \\ &= \sum_{i=1}^t W_i^2 \text{Var}(\bar{X}) \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \sum_{i=1}^t W_i^2.\end{aligned}$$

■ DGWMA管制圖的CL,UCL和LCL能表示為

$$\text{UCL} = \mu + L\sigma\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^t W_i^2}{n}},$$

$$\text{CL} = \mu,$$

$$\text{LCL} = \mu - L\sigma\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^t W_i^2}{n}}.$$

The DGWMA control chart (4/5)

- 當 Y_t 不屬於管制範圍界線內，過程超控，應採取一些適當的行動。當使用GWMA管制圖， $P(M1 > t) = q_1^{t^\alpha}$ 和 $P(M2 > t) = q_2^{t^\beta}$ 被選擇。

$$P(M_1 = t) = q_1^{(t-1)^\alpha} - q_1^{t^\alpha},$$

$$P(M_2 = t) = q_2^{(t-1)^\beta} - q_2^{t^\beta},$$

- $q_1, q_2 \in (0, 1), \alpha, \beta > 0$ 和 $t = 1, 2, \dots$ ，所以

$$\begin{aligned} W_t &= \sum_{j=1}^t P(M_1 = j)P(M_2 = t - j + 1) \\ &= \sum_{j=1}^t (q_1^{(j-1)^\alpha} - q_1^{j^\alpha})(q_2^{(t-j)^\beta} - q_2^{(t-j+1)^\beta}). \end{aligned}$$

The DGWMA control chart (5/5)

- 公式(2)中DGWMA統計值 Y_t 可定義為 $DGWMA(q_1, \alpha; q_2, \beta)$ 。
- 公式(3)中 W_t 使用 $P(M_1 > t) = q_2^{t^\beta}$ 和 $P(M_2 > t) = q_1^{t^\alpha}$ 推導與使用 $P(M_1 > t) = q_2^{t^\beta}$ 和 $P(M_2 > t) = q_1^{t^\alpha}$ 推導是相同的。因此

$$DGWMA(q_1, \alpha; q_2, \beta) = DGWMA(q_2, \beta; q_1, \alpha)$$

Some special cases (1/5)

- 由於DGWMA管制圖最多4個參數，計算複雜甚至不方便使用。對於某些參數指定值能減少DGWMA參數數量從而降低計算複雜性並明顯提高其實用性。
- 討論DGWMA管制圖的這些特殊case，並在下段提出效率比較。

■ 4.1 Case 1

如果 $q_1=q_2=q$, $\beta=\alpha$ 而且 $0<q<1$ 時

$$W_t = \sum_{j=1}^t (q^{(j-1)\alpha} - q^{j\alpha})(q^{(t-j)\alpha} - q^{(t-j+1)\alpha}),$$

$$1 - \sum_{j=1}^t W_j = q^{t\alpha} + \sum_{j=1}^t (q^{(j-1)\alpha} - q^{j\alpha})q^{(t-j+1)\alpha}.$$

Some special cases (2/5)

此情況下，DGWMA管制圖被視為使用GWMA(q, α)雙次加權序列。DGWMA統計值 Y_t 由DGWMA(q, α)和DGWMA(q, α)=DGWMA($q, \alpha; q, \alpha$)定義。

為了DGWMA的方便使用，考慮DGWMA(q, α)管制圖。

■ 4.2 Case 2

如果 $q_1=q_2=q$, $\beta=1$ 而且 $0 < q < 1$ 時

$$W_t = (1 - q)(q^{t-1} - q^{t^\alpha}) + (1 - q)^2 \sum_{j=1}^{t-1} q^{(t-j)^\alpha + j - 1},$$

$$1 - \sum_{j=1}^t W_j = q^t + (1 - q) \sum_{j=1}^t q^{(t-j+1)^\alpha + j - 1}.$$

Some special cases (3/5)

前述討論表示， W_t 由加權序列 EWMA(1-q) 和 GWMA(q,α)組成。

此情況下，由EGWMA(q,α)定義DGWMA統計量 Y_t 。

■ 4.3 Case 3

If $\alpha = \beta = 1$ 時

$$W_t = (1 - q_1)(1 - q_2) \frac{1 - (q_1/q_2)^t}{1 - (q_1/q_2)} q_2^{t-1},$$

$$1 - \sum_{j=1}^t W_j = q_2(1 - q_1) \frac{q_2^t - q_1^t}{q_2 - q_1} + q_1^t,$$

$$Y_t = (1 - q_1)(1 - q_2) \sum_{j=1}^t \frac{1 - (q_1/q_2)^{t+1-j}}{1 - (q_1/q_2)} q_2^{t-j} \bar{X}_j + \left(q_2(1 - q_1) \frac{q_2^t - q_1^t}{q_2 - q_1} + q_1^t \right) \mu.$$

Some special cases (4/5)

(Zhang和Chen)如果 $q_1=\lambda_4$ 而且 $q_2=\lambda_2$ ，那麼結果是相同。DEWMA管制圖統計量 Y_t 參數變成 $1-q_2$ 和 $1-q_1$ 。

當 $\alpha=\beta=1$ 時，DEWMA管制圖變成DGWMA管制圖的一個特殊case。

■ 4.4 Case 4

根據case3的假設，特別是當 $q_1=q_2=q$ 和 $0<q<1$ 時

$$1 - \sum_{j=1}^t W_j = q^t(t - tq + 1),$$

$$W_t = tq^{t-1}(1 - q)^2,$$

$$Y_t = (1 - q)^2 \sum_{j=1}^t (t - j + 1)q^{t-j} \bar{X}_j + q^t(t - tq + 1)\mu.$$

Some special cases (5/5)

DEWMA管制圖統計量 Y_t 參數變成 $1-q$ 。表示統計值為 $DEWMA(1-q)$ 。(Zhang 和 Chen)發現當 $(q_1 < q_2)$ 時 $DEWMA(1-q_2, 1-q_1)$ 不優於 $DEWMA(1-q_2)$ 。因此，本研究只使用DEWMA管制圖單一參數進行比較。

Performance measurement and

Table 2. Some ARLs (SDRLs) of DGWMA charts when $ARL_0 \cong 500$.

C	Schemes			Shifts in process mean (δ)								
	q	α	L	0.00	0.25σ	0.5σ	0.75σ	1.0σ	1.25σ	1.5σ	2.0σ	3.0σ
■	0.7	0.5	2.863	500.01 (509.26)	81.72 (69.49)	26.25 (19.07)	13.29 (8.78)	8.23 (5.08)	5.72 (3.35)	4.26 (2.39)	2.73 (1.41)	1.54 (0.67)
		0.7	2.801	499.74 (505.08)	99.95 (93.91)	28.24 (22.55)	13.40 (9.32)	8.11 (5.17)	5.56 (3.33)	4.12 (2.35)	2.63 (1.36)	1.50 (0.64)
		0.9	2.797	500.33 (506.15)	126.18 (123.00)	33.79 (29.64)	14.75 (11.14)	8.53 (5.65)	5.75 (3.50)	4.23 (2.43)	2.67 (1.41)	1.50 (0.66)
	0.8	1.0	2.807	499.97 (501.84)	139.36 (136.73)	37.44 (33.77)	15.73 (12.37)	8.88 (6.07)	5.91 (3.64)	4.33 (2.49)	2.72 (1.44)	1.51 (0.67)
		0.1	3.087	499.79 (502.36)	187.52 (157.40)	71.19 (54.54)	34.60 (25.55)	19.70 (14.16)	12.45 (8.77)	8.40 (5.82)	4.46 (2.97)	1.89 (1.09)
		0.3	2.924	500.53 (538.78)	75.16 (57.74)	27.32 (18.64)	14.52 (9.22)	9.15 (5.55)	6.38 (3.73)	4.74 (2.69)	2.98 (1.59)	1.60 (0.74)
	0.9	0.5	2.640	500.18 (536.16)	65.46 (55.25)	21.82 (16.23)	11.24 (7.72)	7.05 (4.55)	4.93 (3.01)	3.71 (2.15)	2.42 (1.27)	1.41 (0.60)
		0.7	2.584	500.43 (516.89)	76.86 (69.21)	23.50 (17.96)	11.70 (8.14)	7.19 (4.73)	4.96 (3.11)	3.69 (2.20)	2.37 (1.28)	1.39 (0.59)
		0.9	2.619	499.40 (510.02)	98.24 (93.62)	27.17 (22.12)	12.86 (9.03)	7.79 (5.05)	5.35 (3.31)	3.95 (2.36)	2.49 (1.38)	1.42 (0.62)
		1.0	2.646	500.3 (508.53)	110.20 (106.50)	29.76 (25.22)	13.57 (9.75)	8.12 (5.26)	5.56 (3.40)	4.10 (2.43)	2.58 (1.43)	1.44 (0.64)
	0.9	0.1	3.087	500.62 (502.42)	176.84 (145.67)	66.69 (50.08)	32.67 (23.65)	18.79 (13.23)	11.98 (8.30)	8.15 (5.55)	4.37 (2.87)	1.88 (1.07)
		0.3	2.758	499.44 (636.58)	61.86 (49.94)	22.76 (16.08)	12.32 (8.08)	7.86 (4.88)	5.55 (3.31)	4.16 (2.40)	2.67 (1.44)	1.49 (0.67)
0.5		2.205	499.28 (668.28)	47.28 (46.37)	15.84 (13.68)	8.26 (6.43)	5.26 (3.77)	3.74 (2.49)	2.87 (1.78)	1.93 (1.04)	1.23 (0.46)	
0.7		2.185	500.03 (568.79)	57.42 (52.63)	18.53 (15.50)	9.30 (7.32)	5.72 (4.25)	3.96 (2.75)	2.97 (1.94)	1.95 (1.09)	1.23 (0.46)	
0.9		2.303	499.88 (528.22)	71.43 (65.30)	22.08 (17.20)	11.09 (8.08)	6.80 (4.81)	4.64 (3.18)	3.42 (2.25)	2.16 (1.27)	1.28 (0.53)	
1.0		2.366	500.11 (520.05)	80.02 (74.37)	23.77 (18.41)	11.89 (8.37)	7.32 (4.99)	5.01 (3.36)	3.68 (2.41)	2.29 (1.38)	1.31 (0.57)	

Note: Entries inside parentheses are SDRLs.

7

Performance measurement and comparison(2/3)

- 計算ARLs並將這些時間變化管制界線管制圖結果進行比較。
- EWMA管制圖藉由馬可夫鏈方法能得到給定管制界線ARLs，但在GWMA，DEWMA和DGWMA管制圖中不容易。
- 數值分析和電腦模擬被使用來估計管制圖的ARLs。這項研究模擬使用FORTRAN 90和IMSL Stat/Library。不失一般性，設置分組大小其 $n=1$ 和 X_t ， $t= 1, 2, \dots$ ，獨立常態分配平均 $\delta(\mu=0)$ ，變異數 $\sigma^2=1$ 。
- 每個模擬重複運行10萬次，並給定控制內的ARL (ARL_0) 是500，型I誤差為 0.002。

Performance measurement and

Schemes			Shifts in process mean (δ)								
q	α	L	0.00	0.25σ	0.5σ	0.75σ	1.0σ	1.25σ	1.5σ	2.0σ	3.0σ
DEWMA 0.7	1.00	2.807	499.97 (501.84)	139.36 (136.73)	37.44 (33.77)	15.73 (12.37)	8.88 (6.07)	5.91 (3.64)	4.33 (2.49)	2.72 (1.44)	1.51 (0.67)
GWMA 0.8	0.50	3.052	499.13 (501.37)	112.31 (95.12)	36.98 (26.81)	18.39 (12.20)	11.14 (6.97)	7.53 (4.53)	5.46 (3.17)	3.32 (1.82)	1.71 (0.82)
DGWMA 0.63	0.73	2.893	499.15 (501.39)	123.37 (119.18)	33.58 (28.76)	14.95 (11.00)	8.74 (5.71)	5.91 (3.55)	4.34 (2.47)	2.75 (1.41)	1.55 (0.67)
DEWMA 0.8	1.00	2.646	500.30 (508.53)	110.20 (106.50)	29.76 (25.22)	13.57 (9.75)	8.12 (5.26)	5.56 (3.40)	4.10 (2.43)	2.58 (1.43)	1.44 (0.64)
GWMA 0.9	0.75	2.881	499.62 (509.08)	83.85 (72.36)	26.65 (19.38)	13.48 (8.88)	8.35 (5.14)	5.80 (3.40)	4.31 (2.42)	2.76 (1.43)	1.55 (0.68)
DGWMA 0.71	0.61	2.802	499.43 (509.29)	87.84 (79.30)	26.33 (19.94)	12.98 (8.80)	7.97 (5.02)	5.50 (3.28)	4.09 (2.32)	2.62 (1.36)	1.50 (0.64)
DEWMA 0.9	1.00	2.366	500.11 (520.05)	80.02 (74.37)	23.77 (18.41)	11.89 (8.37)	7.32 (4.99)	5.01 (3.36)	3.68 (2.41)	2.29 (1.38)	1.31 (0.57)
GWMA 0.95	0.84	2.669	499.69 (522.77)	69.58 (59.64)	22.63 (16.74)	11.57 (7.91)	7.22 (4.63)	5.04 (3.07)	3.78 (2.19)	2.45 (1.29)	1.43 (0.61)
DGWMA 0.8	0.60	2.593	499.98 (521.67)	69.68 (60.47)	22.32 (16.82)	11.30 (7.88)	7.00 (4.59)	4.86 (3.03)	3.64 (2.14)	2.36 (1.25)	1.39 (0.58)
DEWMA 0.95	1.00	2.084	499.06 (548.08)	63.76 (58.19)	20.75 (16.71)	10.50 (8.22)	6.40 (4.91)	4.33 (3.24)	3.17 (2.27)	1.99 (1.25)	1.21 (0.47)
GWMA 0.97	0.85	2.507	499.04 (547.95)	60.91 (53.09)	20.14 (15.59)	10.35 (7.37)	6.49 (4.33)	4.55 (2.86)	3.44 (2.04)	2.26 (1.20)	1.35 (0.56)
DGWMA 0.9	0	2.222	500.16	61.81	19.82	9.93	6.08	4.18	3.11	2.01	1.24

58。

GWMA
運行長度
介於500

Note:

Entries inside
parentheses are
SDRLs.

) 遠小於
(1.5σ)發生
VMA(q, α)

Table 1. Comparison of ARLs (SDRLs) of DGWMA, GWMA and DEWMA charts when $ARL_0 \cong 500$ with the similar SDRL₀.

ARL profiles of the DGWMA control chart(1/2)

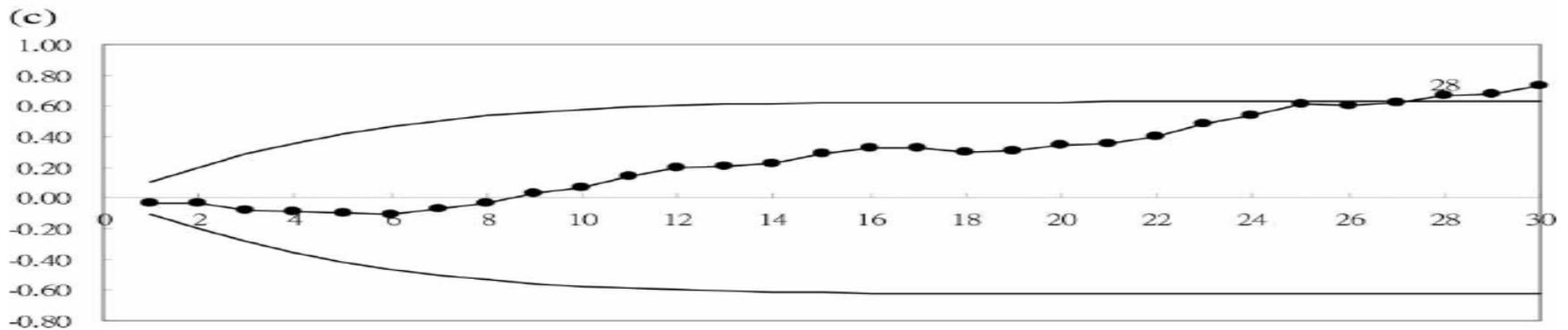
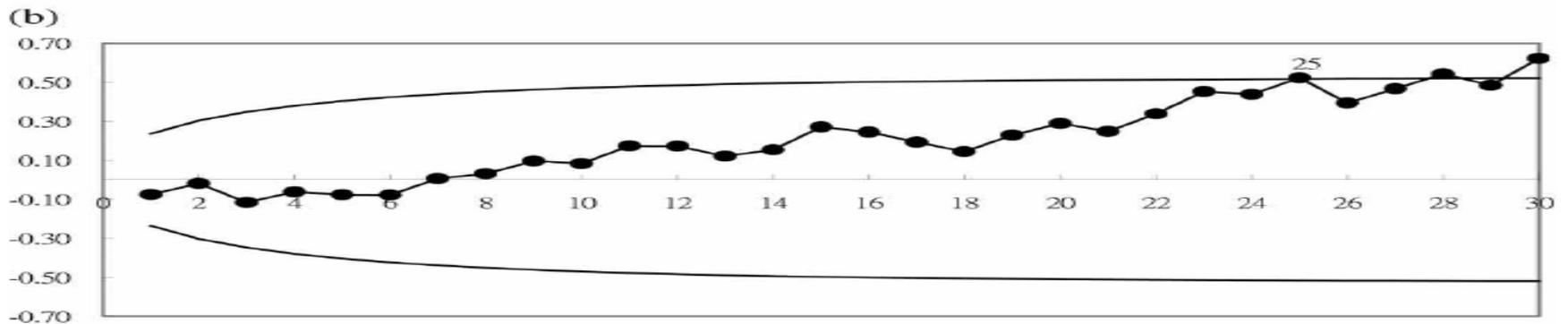
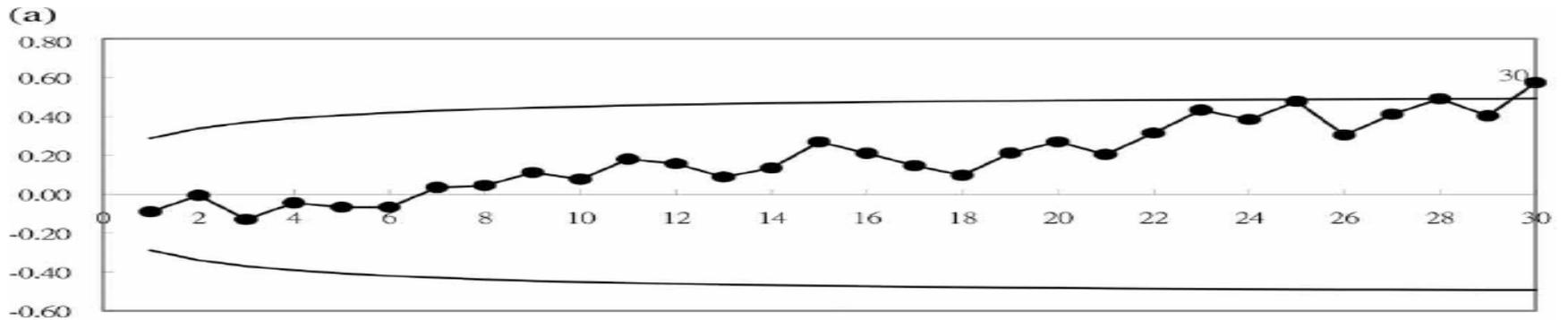
- ARL通常需要足夠大以避免管制過程假警報，並足夠小去檢測當管制超控時的快速偏移。為了了解DGWMA管制圖的徹底執行情況，DGWMA管制界線的ARL值指定為L。
- DGWMA(q, α) 管制圖乃是在這些考慮下設計去選擇適當的成對(q, α)。
- 表2列出當設計參數 $q \in (0.7, 0.8, 0.9)$ 和調整參數 $\alpha \in (0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 1.0)$ 時DGWMA管制圖的ARLs其 $ARL_0 \cong 500$ 。括號內為SDRLs。此表顯示 α 固定時圖表 q 值越大較敏感。

ARL profiles of the DGWMA control chart(2/2)

- 如果固定 q 值， $\alpha \approx 0.5$ 的DGWMA管制圖有較大的 q 值其 ARL_1 變得更小，但 $SDRL_0$ 大幅擴大能在檢測偏移提供更好的性能。
- 表3認為當 $ARL_0 \cong 500$ 與 $SDRL_0$ 介於500到668之間檢測DGWMA管制圖中位數偏移 $SDRL_0$ 和 ARL_1 。建議使用一些成對參數。當 $SDRL_0$ 較小，中等的 q 和較大的 α ($q \approx 0.6, \alpha \approx 0.8$)被使用。當 ARL_1 較小，較大的 q 和中等的 α ($q \approx 0.6, \alpha \approx 0.8$)被使用。
- 圖 1a - c表示當 $ARL_0 = 500, 370, 250, 200$ 時管制界線寬度變化隨 L 參數(q, α) ($q = [0.5, 0.9]$)，其中 $\alpha = 0.5$ 在圖1a， $\alpha = 0.6$ 在圖1b， $\alpha = 0.7$ 在圖1c。在確定的(q, α)和 ARL_0 後，從圖1可得到相對應的值 L 。

Example (1/2)

- 一組模擬數據在此被使用說明DGWMA管制圖為互相獨立的觀察值。其平均數 $\mu+\delta$ 和變異數 $\sigma^2=1$ 服從常態分配。假設目標值 $\mu=0$ 。
- 前10個樣品的管制過程($\delta=0$)，但最後20個樣品偏移在平均數 0.8σ ($\delta=0.8$)增加。
- 表4列出 30個模擬數據隨著它們相對應的DGWMA管制統計值 Y_t ，DEWMA管制統計值 Z_t 和GWMA管制統計值 G_t 和其相關時間變化管制圖。
- 從表1可知對於 $ARL_0=500$ 和 $SDRL_0\approx 509$ ，DGWMA管制圖參數 $q = 0.71$ ， $\alpha = 0.61$ 和 $L = 2.802$ ；DEWMA管制圖參數 $1-q=0.2$ 和 $L=2.646$ ，和GWMA管制圖參數 $q=0.9$ ， $\alpha=0.75$ 和 $L=2.881$ 。



Example (2/2)

- 2a顯示GWMA管制圖統計值的點。2b顯示DGWMA管制圖統計值的點。2c顯示DEWMA管制圖統計值的點。
- GWMA管制圖超控訊號在第30個觀察值; DEWMA管制圖超控訊號在28個觀察值之後，DGWMA管制圖超控訊號在第25個觀察值之後。
- 換句話說，DGWMA管制圖中可以檢測到中等的偏移比GWMA和DEWMA管制圖更快速。

Conclusions

- 提出DGWMA管制圖為了監控過程平均值，透過模擬得出DGWMA管制圖的ARL。
- 分析結果表示DGWMA管制圖優於GWMA及DEWMA管制圖在檢測過程的中等偏移。
- 當偏移小於 0.5σ ，DGWMA管制圖比DEWMA管制圖更敏感，但比GWMA管制圖不敏感。當偏移介於 0.5σ 和 1.5σ 間DGWMA管制圖優於GWMA及DEWMA管制圖。當平均數偏移大於 1.5σ 時，DEWMA管制圖是最好的選擇。
- DGWMA管制圖以後可以探討的包括DGWMA的運行長度分配，以及發展 DGWMA快速初始反應和DGWMA自相關。

Table 3. Some recommended pairs of the parameters for using the DGWMA charts when $ARL_0 \cong 500$ and $SDRL_0$ is between 500 and 668.

Schemes			Shifts in process mean (δ)								
q	α	L	0.00	0.25σ	0.5σ	0.75σ	1.0σ	1.25σ	1.5σ	2.0σ	3.0σ
0.6	0.8	2.917	499.40	141.69	38.41	16.25	9.18	6.10	4.44	2.79	1.56
			(499.98)	(138.49)	(34.35)	(12.69)	(6.27)	(3.77)	(2.55)	(1.44)	(0.68)
	0.7	2.929	499.39	128.45	35.07	15.46	9.00	6.06	4.44	2.80	1.57
			(501.71)	(124.38)	(30.21)	(11.46)	(5.92)	(3.66)	(2.52)	(1.44)	(0.68)
	0.6	2.949	500.20	115.33	32.51	15.08	8.99	6.11	4.50	2.85	1.58
			(504.39)	(109.01)	(26.46)	(10.63)	(5.74)	(3.63)	(2.53)	(1.46)	(0.69)
0.7	0.7	2.801	499.74	99.95	28.24	13.40	8.11	5.56	4.12	2.63	1.50
			(505.08)	(93.91)	(22.55)	(9.32)	(5.17)	(3.33)	(2.35)	(1.36)	(0.64)
	0.6	2.822	499.86	89.12	26.68	13.14	8.06	5.56	4.14	2.65	1.51
			(508.05)	(80.47)	(20.20)	(8.89)	(5.07)	(3.30)	(2.34)	(1.37)	(0.65)
0.8	0.9	2.619	499.40	98.24	27.17	12.86	7.79	5.35	3.95	2.49	1.42
			(510.02)	(93.62)	(22.12)	(9.03)	(5.05)	(3.31)	(2.36)	(1.38)	(0.62)
	0.8	2.596	500.44	86.67	25.11	12.23	7.47	5.14	3.80	2.42	1.40
			(514.70)	(80.61)	(19.67)	(8.51)	(4.89)	(3.21)	(2.28)	(1.32)	(0.60)
	0.7	2.584	500.43	76.86	23.50	11.70	7.19	4.96	3.69	2.37	1.39
			(516.89)	(69.21)	(17.96)	(8.14)	(4.73)	(3.11)	(2.20)	(1.28)	(0.59)
	0.6	2.593	499.98	69.68	22.32	11.30	7.00	4.86	3.64	2.36	1.39
			(521.67)	(60.47)	(16.82)	(7.88)	(4.59)	(3.03)	(2.14)	(1.25)	(0.58)
0.9	0.9	2.303	499.88	71.43	22.08	11.09	6.80	4.64	3.42	2.16	1.28
			(528.22)	(65.30)	(17.20)	(8.08)	(4.81)	(3.18)	(2.25)	(1.27)	(0.53)
	0.8	2.239	499.84	63.83	20.34	10.20	6.24	4.28	3.18	2.04	1.25
			(541.86)	(57.83)	(16.30)	(7.75)	(4.55)	(2.98)	(2.09)	(1.18)	(0.49)
	0.7	2.185	500.03	57.42	18.53	9.30	5.72	3.96	2.97	1.95	1.23
			(568.79)	(52.63)	(15.50)	(7.32)	(4.25)	(2.75)	(1.94)	(1.09)	(0.46)
	0.6	2.159	499.88	51.60	16.81	8.53	5.33	3.74	2.84	1.90	1.22
			(609.63)	(49.34)	(14.55)	(6.81)	(3.94)	(2.57)	(1.81)	(1.04)	(0.45)
	0.5	2.205	499.28	47.28	15.84	8.26	5.26	3.74	2.87	1.93	1.23
			(668.28)	(46.37)	(13.68)	(6.43)	(3.77)	(2.49)	(1.78)	(1.04)	(0.46)

Note: Entries inside parentheses are SDRLs.

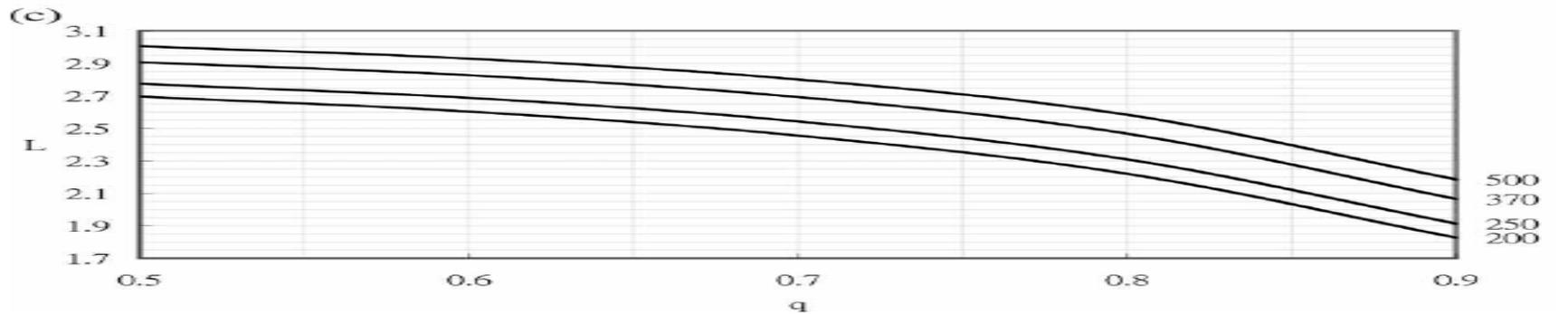
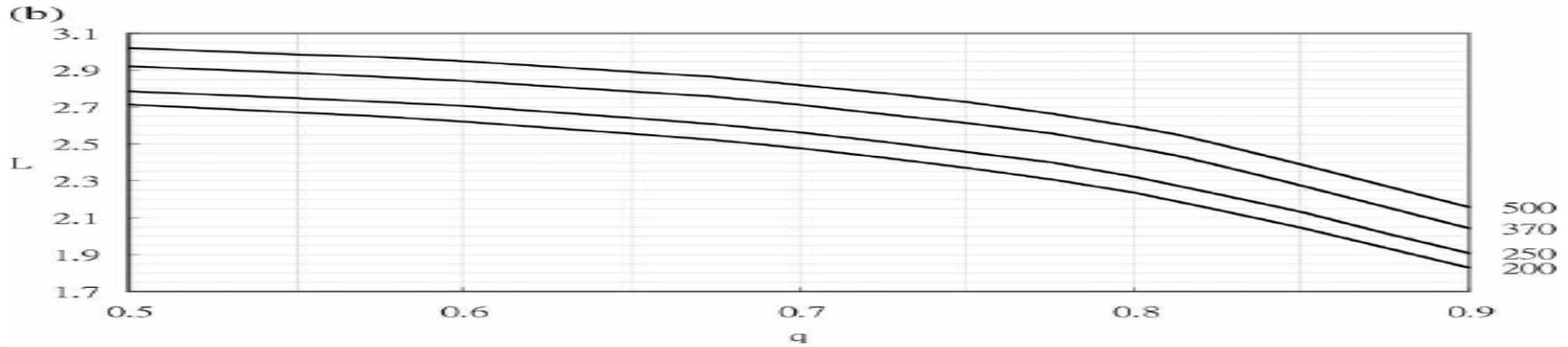
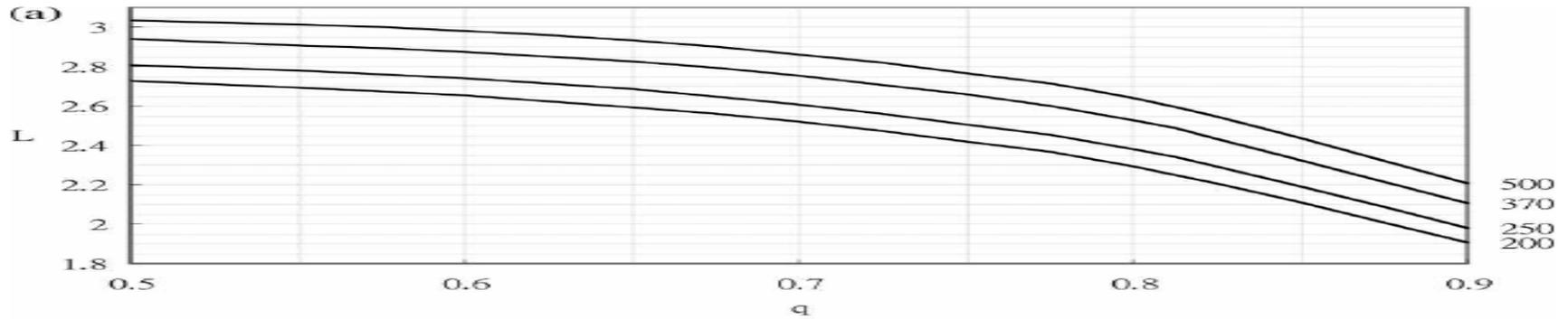


Table 4. Examples of the GWMA, DGWMA and DEWMA control charts using data for the first 10 observations where $\mu = 0$ and the last 20 observations where the mean has shifted $\mu = 0.8\sigma$. The signals for out-of-control are in bold print.

t	X_t	G_t	LCL_t	UCL_t	Y_t	LCL_t	UCL_t	Z_t	LCL_t	UCL_t
1	-0.900	-0.090	-0.288	0.288	-0.076	-0.236	0.236	-0.036	-0.106	0.106
2	0.495	-0.007	-0.340	0.340	-0.020	-0.303	0.303	-0.038	-0.200	0.200
3	-1.144	-0.129	-0.370	0.370	-0.117	-0.347	0.347	-0.083	-0.285	0.285
4	0.417	-0.044	-0.391	0.391	-0.062	-0.380	0.380	-0.092	-0.358	0.358
5	-0.215	-0.067	-0.407	0.407	-0.077	-0.404	0.404	-0.103	-0.419	0.419
6	-0.119	-0.067	-0.420	0.420	-0.078	-0.424	0.424	-0.110	-0.467	0.467
7	0.910	0.035	-0.430	0.430	0.007	-0.439	0.439	-0.074	-0.506	0.506
8	0.386	0.045	-0.439	0.439	0.031	-0.452	0.452	-0.033	-0.536	0.536
9	0.865	0.111	-0.446	0.446	0.096	-0.462	0.462	0.030	-0.560	0.560
10	0.050	0.077	-0.452	0.452	0.083	-0.471	0.471	0.070	-0.577	0.577
11	1.194	0.181	-0.457	0.457	0.173	-0.478	0.478	0.141	-0.591	0.591
12	0.301	0.157	-0.461	0.461	0.172	-0.485	0.485	0.193	-0.601	0.601
13	-0.367	0.089	-0.465	0.465	0.121	-0.490	0.490	0.204	-0.608	0.608
14	0.489	0.135	-0.469	0.469	0.153	-0.494	0.494	0.222	-0.614	0.614
15	1.613	0.270	-0.472	0.472	0.271	-0.498	0.498	0.290	-0.618	0.618
16	0.146	0.211	-0.474	0.474	0.245	-0.501	0.501	0.327	-0.620	0.620
17	-0.319	0.146	-0.477	0.477	0.193	-0.504	0.504	0.325	-0.623	0.623
18	-0.399	0.098	-0.479	0.479	0.144	-0.507	0.507	0.295	-0.624	0.624
19	1.106	0.212	-0.481	0.481	0.229	-0.509	0.509	0.308	-0.625	0.625
20	1.046	0.269	-0.482	0.482	0.288	-0.511	0.511	0.346	-0.626	0.626
21	-0.069	0.205	-0.484	0.484	0.248	-0.512	0.512	0.354	-0.626	0.626
22	1.329	0.315	-0.485	0.485	0.338	-0.514	0.514	0.398	-0.627	0.627
23	1.851	0.433	-0.487	0.487	0.453	-0.515	0.515	0.484	-0.627	0.627
24	0.493	0.384	-0.488	0.488	0.438	-0.516	0.516	0.539	-0.627	0.627
25	1.534	0.478	-0.489	0.489	0.522	-0.517	0.517	0.615	-0.627	0.627
26	-0.813	0.304	-0.490	0.490	0.394	-0.518	0.518	0.606	-0.627	0.627
27	1.207	0.411	-0.491	0.491	0.467	-0.518	0.518	0.624	-0.627	0.627
28	1.479	0.491	-0.491	0.491	0.542	-0.519	0.519	0.670	-0.627	0.627
29	0.017	0.404	-0.492	0.492	0.484	-0.520	0.520	0.673	-0.627	0.627
30	2.148	0.575	-0.493	0.493	0.622	-0.520	0.520	0.734	-0.627	0.627