



國立雲林科技大學工業工程與管理所

Graduate school of Industrial Engineering & Management,
National Yunlin University of Science & Technology

系統可靠度實驗室 System Reliability Lab.
<http://campusweb.yuntech.edu.tw/~qre/index.htm>

The extended GWMA control chart

出處：Quality Engineering, 2008 Copyright *Taylor & Francis Group, LLC* DOI:10.1080/08982110802334120

作者：Shey-Huei Sheu* and Yu-Tai Hsieh

報告學生：田馥華

指導老師：童超塵教授

Abstract

- 藉由模擬雙指數加權移動平均(DEWMA)擴展一般加權移動平均(GWMA)管制圖。其建議使用圖表稱為**雙一般加權移動平均(DGWMA)管制圖**。
- 評估模擬GWMA、DEWMA和DGWMA管制圖平均運行長度(ARL)特色。
- 通常DGWMA管制圖在檢測一個**0.5**和**1.5**標準差間的平均中偏移過程轉變的時間變化管制界線**較**DEWMA和GWMA管制圖**敏感**。GWMA管制圖在平均偏移低於**0.5**標準差進行更好，而DEWMA在平均偏移高於**1.5**標準差進行更好。
- 討論DGWMA管制圖的設計。

Content

- Introduction
- The GWMA control chart
- The DGWMA control chart
- Some special cases
- Performance measurement and comparison
- ARL profiles of the DGWMA control chart
- Example
- Conclusions

Keywords: GWMA control chart; DGWMA control chart; DEWMA control chart; average run length; time-varying control limits

Introduction(1/2)

| | |
|-----------------|---|
| Roberts | 首先介紹幾何移動平均(GMA)管制圖的過程管制。 |
| Robinson和Ho | 提出數值程序在ARLs GMA管制圖的製表。 |
| Hunter | 提出管制圖應用技術，稱為指數加權移動平均(EWMA)管制圖 EWMA的幾項研究也已被報告。 |
| Crowder | 決定最佳參數設計權術和Nomogram管制圖的管制界線寬度。 |
| Lucas和 Saccucci | 提出快速初步反應指數EWMA(FIREWMA)與最初幾個觀察值的進一步縮小可以提高EWMA管制圖的性能的管制界限。 |
| Steiner | 利用FIR監測在事先管制信號外立即反應並得出其結論EWMA 管制圖時間變化管制界線在檢測啟動品質問題較敏感。 |

Introduction(2/2)

Sheu and Griffith, Sheu
and Sheu and Lin

發展和實施擴大EWMA管制圖，稱為一般加權移動平均(GWMA)管制圖。其更敏感在檢測過程中的小偏移，而且由於加入調整參數 α 可以點出在最初過程中的小偏移也顯示綜合修華特GWMA管制圖有/無運行規則比GWMA管制圖在偵測小偏更移敏感。

Zhang 和 Chen

擴大EWMA管制圖的雙指數加權移動平均(DEWMA)管制圖也顯示了DEWMA比EWMA管制小平均偏移具有更好的性能。

The GWMA control chart(1/4)

- 過去資料的移動平均，每個資料點分配一個權重。其中獨立樣本的順序，設M代表直到事件A發生的樣本數(先前發生的事件設為A)。

$$\sum_{m=1}^{\infty} P(M = m) = P(M = 1) + P(M = 2) + \cdots + P(M = t) + P(M > t) = 1.$$

- 設X是一個過程的品質特性。假設已收集的樣本大小n，假定 X_{it} ， $i = 1, 2, \dots, n$ 是時間t獨立隨機抽樣平均數為 $\mu + \delta$ ，變異數為 σ^2 的每個點， $t = 1, 2, \dots$ 。
- $\delta = 0$ 表示該過程仍在控制中。否則，過程改變或偏移。
- $\bar{X}_t, t = 1, 2, \dots$ ，平均 $\mu + \delta$ 和變異數 σ^2/n 是獨立隨機變數。

The GWMA control chart(2/4)

- GWMA統計定義為，設起始值 G_0 ，通常 $G_0=\mu$ 。

$$\begin{cases} G_t = P(M = 1)\bar{X}_t + P(M = 2)\bar{X}_{t-1} + \cdots + P(M = t)\bar{X}_1 + P(M > t)\mu, \\ G_0 = \mu, \end{cases} \quad (1)$$

$$t = 1, 2, \dots$$

- 公式(1)的期望值計算

$$\begin{aligned} E(G_t) &= E(P(M = 1)\bar{X}_t + P(M = 2)\bar{X}_{t-1} + \cdots + P(M = t)\bar{X}_1 + P(M > t)\mu) \\ &= \sum_{j=1}^t P(M = j) E(\bar{X}) + P(M > t)\mu = \mu. \end{aligned}$$

The GWMA control chart(3/4)

■ 公式變異數

$$\begin{aligned}\text{Var}(G_t) &= \text{Var} (P(M = 1)\bar{X}_t + P(M = 2)\bar{X}_{t-1} + \cdots + P(M = t)\bar{X}_1 + P(M > t)\mu) \\ &= \sum_{j=1}^t P^2(M = j)\text{Var}(\bar{X}) = Q_t \frac{\sigma^2}{n}, \quad Q_t = \sum_{j=1}^t P^2(M = j)\end{aligned}$$

■ GWMA管制圖的CL、UCL、LCL。其L定義為管制界線的寬度。

$$\text{UCL} = \mu + L\sqrt{\frac{Q_i}{n}}\sigma,$$

$$\text{CL} = \mu,$$

$$\text{LCL} = \mu - L\sqrt{\frac{Q_i}{n}}\sigma.$$

The GWMA control chart (4/4)

- 每當 G_t 不屬於管制範圍限制內時此過程被認為超控，應採取一些行動。為了方便計算 $P(M > t) = q^{t^\alpha}$ 被選擇。

$$P(M = t) = P(M > t - 1) - P(M > t) = q^{(t-1)^\alpha} - q^{t^\alpha}$$

$$t = 1, 2, \dots, 0 < q < 1 \text{ and } 0 < \alpha \leq 1$$

- 設計參數 Q 是常數， α 是調整參數。因此，GWMA管制圖的**權重**是一個**遞減序列**。
- (Roberts)當 $\alpha=1$ 時GWMA統計值是相同的。
- EWMA管制圖的特殊情況下成為了GWMA管制圖。GWMA因子 G_t 在方程式(1)記為 $GWMA(q, \alpha)$ 。相對應的EWMA統計值記為 $EWMA(1 - q)$ 。

The DGWMA control chart(1/5)

- DGWMA統計值定義為

$$\begin{cases} Y_t = P(M_2 = 1)G_t + P(M_2 = 2)G_{t-1} + \cdots + P(M_2 = t)G_1 + P(M_2 > t)\mu, \\ Y_0 = \mu, \end{cases} \quad (2) \quad t = 1, 2, \dots$$

- G_t 是方程式 (1) 中的 GWMA 統計值，加權序列 $\{P(M_1=t)\}$ 。設置起始值 $Y_0=\mu$ ， Y_t 也是另一種 GWMA 統計值加權序列 $\{P(M_2 = t)\}$ ，用 \bar{X}_t 取代 G_t 。

$$\begin{aligned} Y_t &= P(M_2 = 1)G_t + P(M_2 = 2)G_{t-1} + \cdots + P(M_2 = t)G_1 + P(M_2 > t)\mu \\ &= W_1\bar{X}_t + W_2\bar{X}_{t-1} + \cdots + W_t\bar{X}_1 + \left(1 - \sum_{i=1}^t W_i\right)\mu, \end{aligned}$$

The DGWMA control chart (2/5)

$$\begin{aligned} W_t &= P(M_1 = 1)P(M_2 = t) + P(M_1 = 2)P(M_2 = t - 1) + \cdots + P(M_1 = t)P(M_2 = 1) \\ &= \sum_{j=1}^t P(M_1 = j)P(M_2 = t - j + 1). \end{aligned} \quad (3)$$

- W_t 是 \bar{X}_t 的新權重，由加權序列 $\{P(M_1 = t)\}$ 和 $\{P(M_2 = t)\}$ 組成。
- 公式(2)的期望值可以計算如下

$$\begin{aligned} E(Y_t) &= E \left(W_1 \bar{X}_t + W_2 \bar{X}_{t-1} + \cdots + W_t \bar{X}_1 + \left(1 - \sum_{i=1}^t W_i \right) \mu \right) \\ &= \sum_{i=1}^t W_i \cdot E(\bar{X}) + \left(1 - \sum_{i=1}^t W_i \right) \mu \\ &= \mu. \end{aligned}$$

The DGWMA control chart (3/5)

■ 變異數

$$\begin{aligned}\text{Var}(Y_t) &= \text{Var}\left(W_1\bar{X}_t + W_2\bar{X}_{t-1} + \cdots + W_t\bar{X}_1 + \left(1 - \sum_{i=1}^t W_i\right)\mu\right) \\ &= \sum_{i=1}^t W_i^2 \text{Var}(\bar{X}) \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \sum_{i=1}^t W_i^2.\end{aligned}$$

■ DGWMA管制圖的CL,UCL和LCL能表示為

$$\text{UCL} = \mu + L\sigma\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^t W_i^2}{n}},$$

$$\text{CL} = \mu,$$

$$\text{LCL} = \mu - L\sigma\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^t W_i^2}{n}}.$$

The DGWMA control chart (4/5)

- 當 Y_t 不屬於管制範圍界線內，過程超控，應採取一些適當的行動。當使用GWMA管制圖， $P(M1 > t) = q_1^{t^\alpha}$ 和 $P(M2 > t) = q_2^{t^\beta}$ 被選擇。

$$P(M_1 = t) = q_1^{(t-1)^\alpha} - q_1^{t^\alpha},$$

$$P(M_2 = t) = q_2^{(t-1)^\beta} - q_2^{t^\beta},$$

- $q_1, q_2 \in (0, 1), \alpha, \beta > 0$ 和 $t = 1, 2, \dots$ ，所以

$$\begin{aligned} W_t &= \sum_{j=1}^t P(M_1 = j)P(M_2 = t - j + 1) \\ &= \sum_{j=1}^t (q_1^{(j-1)^\alpha} - q_1^{j^\alpha})(q_2^{(t-j)^\beta} - q_2^{(t-j+1)^\beta}). \end{aligned}$$

The DGWMA control chart (5/5)

- 公式(2)中DGWMA統計值 Y_t 可定義為 $DGWMA(q_1, \alpha; q_2, \beta)$ 。
- 公式(3)中 W_t 使用 $P(M_1 > t) = q_2^{t^\beta}$ 和 $P(M_2 > t) = q_1^{t^\alpha}$ 推導與使用 $P(M_1 > t) = q_2^{t^\beta}$ 和 $P(M_2 > t) = q_1^{t^\alpha}$ 推導是相同的。因此

$$DGWMA(q_1, \alpha; q_2, \beta) = DGWMA(q_2, \beta; q_1, \alpha)$$

Some special cases (1/5)

- 由於DGWMA管制圖最多4個參數，計算複雜甚至不方便使用。對於某些參數指定值能減少DGWMA參數數量從而降低計算複雜性並明顯提高其實用性。
- 討論DGWMA管制圖的這些特殊case，並在下段提出效率比較。

■ 4.1 Case 1

如果 $q_1=q_2=q$, $\beta=\alpha$ 而且 $0<q<1$ 時

$$W_t = \sum_{j=1}^t (q^{(j-1)\alpha} - q^{j\alpha})(q^{(t-j)\alpha} - q^{(t-j+1)\alpha}),$$

$$1 - \sum_{j=1}^t W_j = q^{t\alpha} + \sum_{j=1}^t (q^{(j-1)\alpha} - q^{j\alpha})q^{(t-j+1)\alpha}.$$

Some special cases (2/5)

此情況下，DGWMA管制圖被視為使用GWMA(q, α)雙次加權序列。DGWMA統計值 Y_t 由DGWMA(q, α)和DGWMA(q, α)=DGWMA($q, \alpha; q, \alpha$)定義。

為了DGWMA的方便使用，考慮DGWMA(q, α)管制圖。

■ 4.2 Case 2

如果 $q_1=q_2=q$, $\beta=1$ 而且 $0 < q < 1$ 時

$$W_t = (1 - q)(q^{t-1} - q^{t\alpha}) + (1 - q)^2 \sum_{j=1}^{t-1} q^{(t-j)\alpha + j - 1},$$

$$1 - \sum_{j=1}^t W_j = q^t + (1 - q) \sum_{j=1}^t q^{(t-j+1)\alpha + j - 1}.$$

Some special cases (3/5)

前述討論表示， W_t 由加權序列 EWMA(1-q) 和 GWMA(q,α)組成。

此情況下，由EGWMA(q,α)定義DGWMA統計量 Y_t 。

■ 4.3 Case 3

If $\alpha = \beta = 1$ 時

$$W_t = (1 - q_1)(1 - q_2) \frac{1 - (q_1/q_2)^t}{1 - (q_1/q_2)} q_2^{t-1},$$

$$1 - \sum_{j=1}^t W_j = q_2(1 - q_1) \frac{q_2^t - q_1^t}{q_2 - q_1} + q_1^t,$$

$$Y_t = (1 - q_1)(1 - q_2) \sum_{j=1}^t \frac{1 - (q_1/q_2)^{t+1-j}}{1 - (q_1/q_2)} q_2^{t-j} \bar{X}_j + \left(q_2(1 - q_1) \frac{q_2^t - q_1^t}{q_2 - q_1} + q_1^t \right) \mu.$$

Some special cases (4/5)

(Zhang和Chen)如果 $q_1=\lambda_4$ 而且 $q_2=\lambda_2$ ，那麼結果是相同。DEWMA管制圖統計量 Y_t 參數變成 $1-q_2$ 和 $1-q_1$ 。

當 $\alpha=\beta=1$ 時，DEWMA管制圖變成DGWMA管制圖的一個特殊case。

■ 4.4 Case 4

根據case3的假設，特別是當 $q_1=q_2=q$ 和 $0<q<1$ 時

$$1 - \sum_{j=1}^t W_j = q^t(t - tq + 1),$$

$$W_t = tq^{t-1}(1 - q)^2,$$

$$Y_t = (1 - q)^2 \sum_{j=1}^t (t - j + 1)q^{t-j} \bar{X}_j + q^t(t - tq + 1)\mu.$$

Some special cases (5/5)

DEWMA管制圖統計量 Y_t 參數變成 $1-q$ 。表示統計值為 $DEWMA(1-q)$ 。(Zhang 和 Chen)發現當 $(q_1 < q_2)$ 時 $DEWMA(1-q_2, 1-q_1)$ 不優於 $DEWMA(1-q_2)$ 。因此，本研究只使用DEWMA管制圖單一參數進行比較。

Performance measurement and

Table 2. Some ARLs (SDRLs) of DGWMA charts when $ARL_0 \cong 500$.

| C | Schemes | | | Shifts in process mean (δ) | | | | | | | | |
|-----|---------|----------|--------------------|-------------------------------------|--------------------|------------------|------------------|------------------|-----------------|----------------|----------------|----------------|
| | q | α | L | 0.00 | 0.25σ | 0.5σ | 0.75σ | 1.0σ | 1.25σ | 1.5σ | 2.0σ | 3.0σ |
| ■ | 0.7 | 0.5 | 2.863 | 500.01 (509.26) | 81.72 (69.49) | 26.25 (19.07) | 13.29 (8.78) | 8.23 (5.08) | 5.72 (3.35) | 4.26 (2.39) | 2.73 (1.41) | 1.54 (0.67) |
| | | 0.7 | 2.801 | 499.74 (505.08) | 99.95 (93.91) | 28.24 (22.55) | 13.40 (9.32) | 8.11 (5.17) | 5.56 (3.33) | 4.12 (2.35) | 2.63 (1.36) | 1.50 (0.64) |
| | | 0.9 | 2.797 | 500.33 (506.15) | 126.18 (123.00) | 33.79 (29.64) | 14.75 (11.14) | 8.53 (5.65) | 5.75 (3.50) | 4.23 (2.43) | 2.67 (1.41) | 1.50 (0.66) |
| | | 1.0 | 2.807 | 499.97 (501.84) | 139.36 (136.73) | 37.44 (33.77) | 15.73 (12.37) | 8.88 (6.07) | 5.91 (3.64) | 4.33 (2.49) | 2.72 (1.44) | 1.51 (0.67) |
| | 0.8 | 0.1 | 3.087 | 499.79 (502.36) | 187.52 (157.40) | 71.19 (54.54) | 34.60 (25.55) | 19.70 (14.16) | 12.45 (8.77) | 8.40 (5.82) | 4.46 (2.97) | 1.89 (1.09) |
| | | 0.3 | 2.924 | 500.53 (538.78) | 75.16 (57.74) | 27.32 (18.64) | 14.52 (9.22) | 9.15 (5.55) | 6.38 (3.73) | 4.74 (2.69) | 2.98 (1.59) | 1.60 (0.74) |
| | | 0.5 | 2.640 | 500.18 (536.16) | 65.46 (55.25) | 21.82 (16.23) | 11.24 (7.72) | 7.05 (4.55) | 4.93 (3.01) | 3.71 (2.15) | 2.42 (1.27) | 1.41 (0.60) |
| | | 0.7 | 2.584 | 500.43 (516.89) | 76.86 (69.21) | 23.50 (17.96) | 11.70 (8.14) | 7.19 (4.73) | 4.96 (3.11) | 3.69 (2.20) | 2.37 (1.28) | 1.39 (0.59) |
| | | 0.9 | 2.619 | 499.40 (510.02) | 98.24 (93.62) | 27.17 (22.12) | 12.86 (9.03) | 7.79 (5.05) | 5.35 (3.31) | 3.95 (2.36) | 2.49 (1.38) | 1.42 (0.62) |
| | | 1.0 | 2.646 | 500.3 (508.53) | 110.20 (106.50) | 29.76 (25.22) | 13.57 (9.75) | 8.12 (5.26) | 5.56 (3.40) | 4.10 (2.43) | 2.58 (1.43) | 1.44 (0.64) |
| | 0.9 | 0.1 | 3.087 | 500.62 (502.42) | 176.84 (145.67) | 66.69 (50.08) | 32.67 (23.65) | 18.79 (13.23) | 11.98 (8.30) | 8.15 (5.55) | 4.37 (2.87) | 1.88 (1.07) |
| | | 0.3 | 2.758 | 499.44 (636.58) | 61.86 (49.94) | 22.76 (16.08) | 12.32 (8.08) | 7.86 (4.88) | 5.55 (3.31) | 4.16 (2.40) | 2.67 (1.44) | 1.49 (0.67) |
| 0.5 | | 2.205 | 499.28 (668.28) | 47.28 (46.37) | 15.84 (13.68) | 8.26 (6.43) | 5.26 (3.77) | 3.74 (2.49) | 2.87 (1.78) | 1.93 (1.04) | 1.23 (0.46) | |
| 0.7 | | 2.185 | 500.03 (568.79) | 57.42 (52.63) | 18.53 (15.50) | 9.30 (7.32) | 5.72 (4.25) | 3.96 (2.75) | 2.97 (1.94) | 1.95 (1.09) | 1.23 (0.46) | |
| 0.9 | | 2.303 | 499.88 (528.22) | 71.43 (65.30) | 22.08 (17.20) | 11.09 (8.08) | 6.80 (4.81) | 4.64 (3.18) | 3.42 (2.25) | 2.16 (1.27) | 1.28 (0.53) | |
| 1.0 | | 2.366 | 500.11 (520.05) | 80.02 (74.37) | 23.77 (18.41) | 11.89 (8.37) | 7.32 (4.99) | 5.01 (3.36) | 3.68 (2.41) | 2.29 (1.38) | 1.31 (0.57) | |

Note: Entries inside parentheses are SDRLs.

7

Performance measurement and comparison(2/3)

- 計算ARLs並將這些時間變化管制界線管制圖結果進行比較。
- EWMA管制圖藉由馬可夫鏈方法能得到給定管制界線ARLs，但在GWMA，DEWMA和DGWMA管制圖中不容易。
- 數值分析和電腦模擬被使用來估計管制圖的ARLs。這項研究模擬使用FORTRAN 90和IMSL Stat/Library。不失一般性，設置分組大小其 $n=1$ 和 X_t ， $t= 1,2,\dots$ ，獨立常態分配平均 $\delta(\mu=0)$ ，變異數 $\sigma^2=1$ 。
- 每個模擬重複運行10萬次，並給定控制內的ARL (ARL_0) 是500，型I誤差為 0.002。

Performance measurement and

| Schemes | | | Shifts in process mean (δ) | | | | | | | | |
|---------------|----------|-------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------|-------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| q | α | L | 0.00 | 0.25σ | 0.5σ | 0.75σ | 1.0σ | 1.25σ | 1.5σ | 2.0σ | 3.0σ |
| DEWMA 0.7 | 1.00 | 2.807 | 499.97 (501.84) | 139.36 (136.73) | 37.44 (33.77) | 15.73 (12.37) | 8.88 (6.07) | 5.91 (3.64) | 4.33 (2.49) | 2.72 (1.44) | 1.51 (0.67) |
| GWMA 0.8 | 0.50 | 3.052 | 499.13 (501.37) | 112.31 (95.12) | 36.98 (26.81) | 18.39 (12.20) | 11.14 (6.97) | 7.53 (4.53) | 5.46 (3.17) | 3.32 (1.82) | 1.71 (0.82) |
| DGWMA 0.63 | 0.73 | 2.893 | 499.15 (501.39) | 123.37 (119.18) | 33.58 (28.76) | 14.95 (11.00) | 8.74 (5.71) | 5.91 (3.55) | 4.34 (2.47) | 2.75 (1.41) | 1.55 (0.67) |
| DEWMA 0.8 | 1.00 | 2.646 | 500.30 (508.53) | 110.20 (106.50) | 29.76 (25.22) | 13.57 (9.75) | 8.12 (5.26) | 5.56 (3.40) | 4.10 (2.43) | 2.58 (1.43) | 1.44 (0.64) |
| GWMA 0.9 | 0.75 | 2.881 | 499.62 (509.08) | 83.85 (72.36) | 26.65 (19.38) | 13.48 (8.88) | 8.35 (5.14) | 5.80 (3.40) | 4.31 (2.42) | 2.76 (1.43) | 1.55 (0.68) |
| DGWMA 0.71 | 0.61 | 2.802 | 499.43 (509.29) | 87.84 (79.30) | 26.33 (19.94) | 12.98 (8.80) | 7.97 (5.02) | 5.50 (3.28) | 4.09 (2.32) | 2.62 (1.36) | 1.50 (0.64) |
| DEWMA 0.9 | 1.00 | 2.366 | 500.11 (520.05) | 80.02 (74.37) | 23.77 (18.41) | 11.89 (8.37) | 7.32 (4.99) | 5.01 (3.36) | 3.68 (2.41) | 2.29 (1.38) | 1.31 (0.57) |
| GWMA 0.95 | 0.84 | 2.669 | 499.69 (522.77) | 69.58 (59.64) | 22.63 (16.74) | 11.57 (7.91) | 7.22 (4.63) | 5.04 (3.07) | 3.78 (2.19) | 2.45 (1.29) | 1.43 (0.61) |
| DGWMA 0.8 | 0.60 | 2.593 | 499.98 (521.67) | 69.68 (60.47) | 22.32 (16.82) | 11.30 (7.88) | 7.00 (4.59) | 4.86 (3.03) | 3.64 (2.14) | 2.36 (1.25) | 1.39 (0.58) |
| DEWMA 0.95 | 1.00 | 2.084 | 499.06 (548.08) | 63.76 (58.19) | 20.75 (16.71) | 10.50 (8.22) | 6.40 (4.91) | 4.33 (3.24) | 3.17 (2.27) | 1.99 (1.25) | 1.21 (0.47) |
| GWMA 0.97 | 0.85 | 2.507 | 499.04 (547.95) | 60.91 (53.09) | 20.14 (15.59) | 10.35 (7.37) | 6.49 (4.33) | 4.55 (2.86) | 3.44 (2.04) | 2.26 (1.20) | 1.35 (0.56) |
| DGWMA 0.9 | 0 | 2.222 | 500.16 | 61.81 | 19.82 | 9.93 | 6.08 | 4.18 | 3.11 | 2.01 | 1.24 |

58。

GWMA
運行長度
介於500

Note:

Entries inside
parentheses are
SDRLs.

) 遠小於
(1.5σ) 發生
VMA(q, α)

Table 1. Comparison of ARLs (SDRLs) of DGWMA, GWMA and DEWMA charts when $ARL_0 \cong 500$ with the similar SDRL₀.

ARL profiles of the DGWMA control chart(1/2)

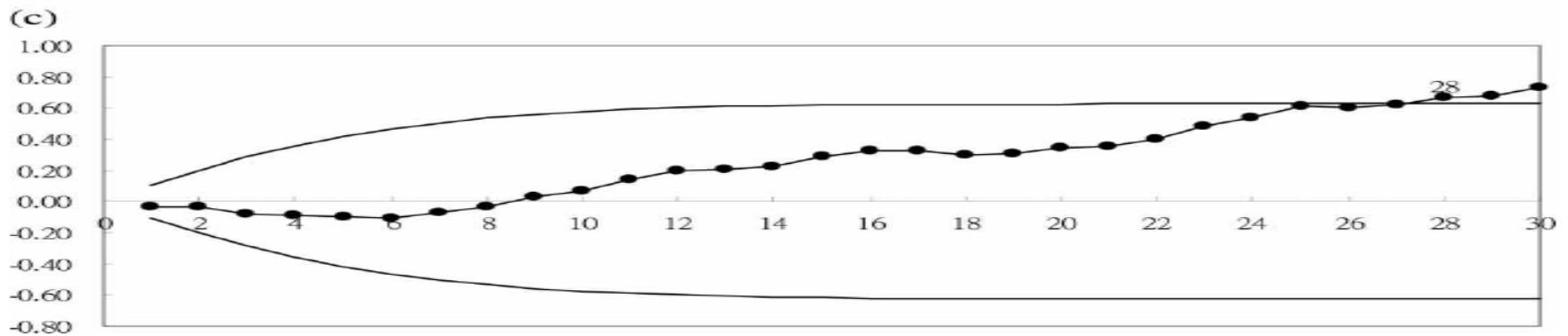
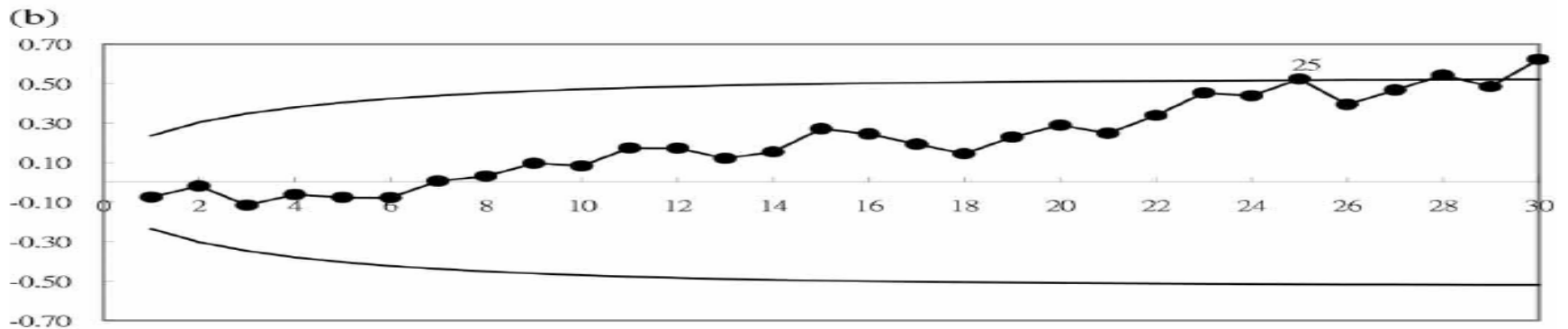
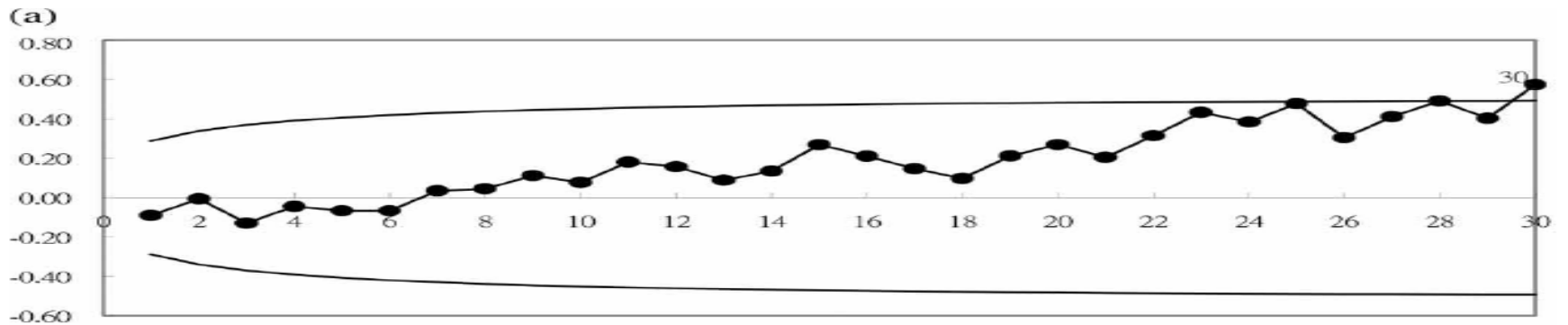
- ARL通常需要足夠大以避免管制過程假警報，並足夠小去檢測當管制超控時的快速偏移。為了了解DGWMA管制圖的徹底執行情況，DGWMA管制界線的ARL值指定為L。
- DGWMA(q, α) 管制圖乃是在這些考慮下設計去選擇適當的成對(q, α)。
- 表2列出當設計參數 $q \in (0.7, 0.8, 0.9)$ 和調整參數 $\alpha \in (0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 1.0)$ 時DGWMA管制圖的ARLs其 $ARL_0 \cong 500$ 。括號內為SDRLs。此表顯示 α 固定時圖表 q 值越大較敏感。

ARL profiles of the DGWMA control chart(2/2)

- 如果固定 q 值， $\alpha \approx 0.5$ 的DGWMA管制圖有較大的 q 值其 ARL_1 變得更小，但 $SDRL_0$ 大幅擴大能在檢測偏移提供更好的性能。
- 表3認為當 $ARL_0 \cong 500$ 與 $SDRL_0$ 介於500到668之間檢測DGWMA管制圖中位數偏移 $SDRL_0$ 和 ARL_1 。建議使用一些成對參數。當 $SDRL_0$ 較小，中等的 q 和較大的 α ($q \approx 0.6, \alpha \approx 0.8$)被使用。當 ARL_1 較小，較大的 q 和中等的 α ($q \approx 0.6, \alpha \approx 0.8$)被使用。
- 圖 1a - c表示當 $ARL_0 = 500, 370, 250, 200$ 時管制界線寬度變化隨 L 參數(q, α) ($q = [0.5, 0.9]$)，其中 $\alpha = 0.5$ 在圖1a， $\alpha = 0.6$ 在圖1b， $\alpha = 0.7$ 在圖1c。在確定的(q, α)和 ARL_0 後，從圖1可得到相對應的值 L 。

Example (1/2)

- 一組模擬數據在此被使用說明DGWMA管制圖為互相獨立的觀察值。其平均數 $\mu+\delta$ 和變異數 $\sigma^2=1$ 服從常態分配。假設目標值 $\mu=0$ 。
- 前10個樣品的管制過程($\delta=0$)，但最後20個樣品偏移在平均數 0.8σ ($\delta=0.8$)增加。
- 表4列出 30個模擬數據隨著它們相對應的DGWMA管制統計值 Y_t ，DEWMA管制統計值 Z_t 和GWMA管制統計值 G_t 和其相關時間變化管制圖。
- 從表1可知對於 $ARL_0=500$ 和 $SDRL_0\approx 509$ ，DGWMA管制圖參數 $q = 0.71$ ， $\alpha = 0.61$ 和 $L = 2.802$ ；DEWMA管制圖參數 $1-q=0.2$ 和 $L=2.646$ ，和GWMA管制圖參數 $q=0.9$ ， $\alpha=0.75$ 和 $L=2.881$ 。



Example (2/2)

- 2a顯示GWMA管制圖統計值的點。2b顯示DGWMA管制圖統計值的點。2c顯示DEWMA管制圖統計值的點。
- GWMA管制圖超控訊號在第30個觀察值; DEWMA管制圖超控訊號在28個觀察值之後，DGWMA管制圖超控訊號在第25個觀察值之後。
- 換句話說，DGWMA管制圖中可以檢測到中等的偏移比GWMA和DEWMA管制圖更快速。

Conclusions

- 提出DGWMA管制圖為了監控過程平均值，透過模擬得出DGWMA管制圖的ARL。
- 分析結果表示DGWMA管制圖優於GWMA及DEWMA管制圖在檢測過程的中等偏移。
- 當偏移小於 0.5σ ，DGWMA管制圖比DEWMA管制圖更敏感，但比GWMA管制圖不敏感。當偏移介於 0.5σ 和 1.5σ 間DGWMA管制圖優於GWMA及DEWMA管制圖。當平均數偏移大於 1.5σ 時，DEWMA管制圖是最好的選擇。
- DGWMA管制圖以後可以探討的包括DGWMA的運行長度分配，以及發展 DGWMA快速初始反應和DGWMA自相關。

Table 3. Some recommended pairs of the parameters for using the DGWMA charts when $ARL_0 \cong 500$ and $SDRL_0$ is between 500 and 668.

| Schemes | | | Shifts in process mean (δ) | | | | | | | | |
|---------|----------|-------|-------------------------------------|--------------|-------------|--------------|-------------|--------------|-------------|-------------|-------------|
| q | α | L | 0.00 | 0.25σ | 0.5σ | 0.75σ | 1.0σ | 1.25σ | 1.5σ | 2.0σ | 3.0σ |
| 0.6 | 0.8 | 2.917 | 499.40 | 141.69 | 38.41 | 16.25 | 9.18 | 6.10 | 4.44 | 2.79 | 1.56 |
| | | | (499.98) | (138.49) | (34.35) | (12.69) | (6.27) | (3.77) | (2.55) | (1.44) | (0.68) |
| | 0.7 | 2.929 | 499.39 | 128.45 | 35.07 | 15.46 | 9.00 | 6.06 | 4.44 | 2.80 | 1.57 |
| | | | (501.71) | (124.38) | (30.21) | (11.46) | (5.92) | (3.66) | (2.52) | (1.44) | (0.68) |
| | 0.6 | 2.949 | 500.20 | 115.33 | 32.51 | 15.08 | 8.99 | 6.11 | 4.50 | 2.85 | 1.58 |
| | | | (504.39) | (109.01) | (26.46) | (10.63) | (5.74) | (3.63) | (2.53) | (1.46) | (0.69) |
| 0.7 | 0.7 | 2.801 | 499.74 | 99.95 | 28.24 | 13.40 | 8.11 | 5.56 | 4.12 | 2.63 | 1.50 |
| | | | (505.08) | (93.91) | (22.55) | (9.32) | (5.17) | (3.33) | (2.35) | (1.36) | (0.64) |
| | 0.6 | 2.822 | 499.86 | 89.12 | 26.68 | 13.14 | 8.06 | 5.56 | 4.14 | 2.65 | 1.51 |
| | | | (508.05) | (80.47) | (20.20) | (8.89) | (5.07) | (3.30) | (2.34) | (1.37) | (0.65) |
| 0.8 | 0.9 | 2.619 | 499.40 | 98.24 | 27.17 | 12.86 | 7.79 | 5.35 | 3.95 | 2.49 | 1.42 |
| | | | (510.02) | (93.62) | (22.12) | (9.03) | (5.05) | (3.31) | (2.36) | (1.38) | (0.62) |
| | 0.8 | 2.596 | 500.44 | 86.67 | 25.11 | 12.23 | 7.47 | 5.14 | 3.80 | 2.42 | 1.40 |
| | | | (514.70) | (80.61) | (19.67) | (8.51) | (4.89) | (3.21) | (2.28) | (1.32) | (0.60) |
| | 0.7 | 2.584 | 500.43 | 76.86 | 23.50 | 11.70 | 7.19 | 4.96 | 3.69 | 2.37 | 1.39 |
| | | | (516.89) | (69.21) | (17.96) | (8.14) | (4.73) | (3.11) | (2.20) | (1.28) | (0.59) |
| | 0.6 | 2.593 | 499.98 | 69.68 | 22.32 | 11.30 | 7.00 | 4.86 | 3.64 | 2.36 | 1.39 |
| | | | (521.67) | (60.47) | (16.82) | (7.88) | (4.59) | (3.03) | (2.14) | (1.25) | (0.58) |
| 0.9 | 0.9 | 2.303 | 499.88 | 71.43 | 22.08 | 11.09 | 6.80 | 4.64 | 3.42 | 2.16 | 1.28 |
| | | | (528.22) | (65.30) | (17.20) | (8.08) | (4.81) | (3.18) | (2.25) | (1.27) | (0.53) |
| | 0.8 | 2.239 | 499.84 | 63.83 | 20.34 | 10.20 | 6.24 | 4.28 | 3.18 | 2.04 | 1.25 |
| | | | (541.86) | (57.83) | (16.30) | (7.75) | (4.55) | (2.98) | (2.09) | (1.18) | (0.49) |
| | 0.7 | 2.185 | 500.03 | 57.42 | 18.53 | 9.30 | 5.72 | 3.96 | 2.97 | 1.95 | 1.23 |
| | | | (568.79) | (52.63) | (15.50) | (7.32) | (4.25) | (2.75) | (1.94) | (1.09) | (0.46) |
| | 0.6 | 2.159 | 499.88 | 51.60 | 16.81 | 8.53 | 5.33 | 3.74 | 2.84 | 1.90 | 1.22 |
| | | | (609.63) | (49.34) | (14.55) | (6.81) | (3.94) | (2.57) | (1.81) | (1.04) | (0.45) |
| | 0.5 | 2.205 | 499.28 | 47.28 | 15.84 | 8.26 | 5.26 | 3.74 | 2.87 | 1.93 | 1.23 |
| | | | (668.28) | (46.37) | (13.68) | (6.43) | (3.77) | (2.49) | (1.78) | (1.04) | (0.46) |

Note: Entries inside parentheses are SDRLs.

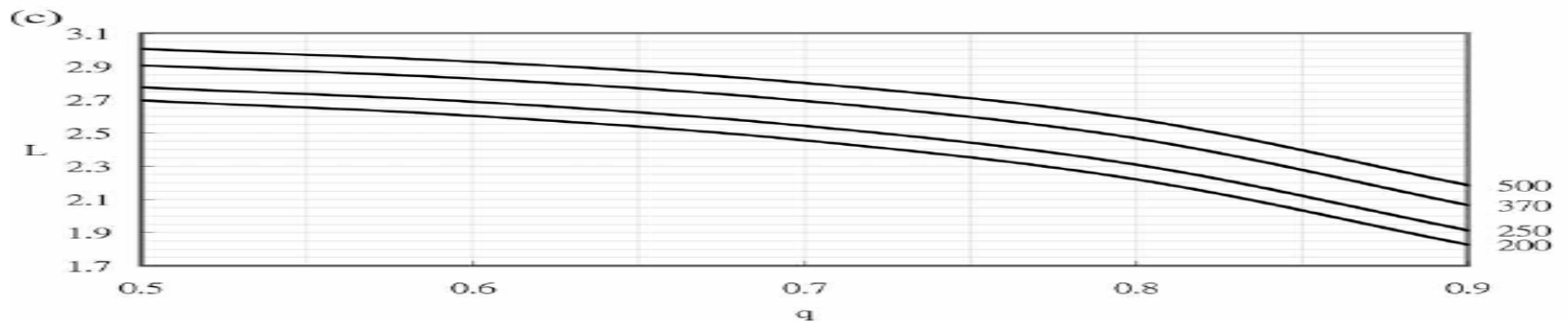
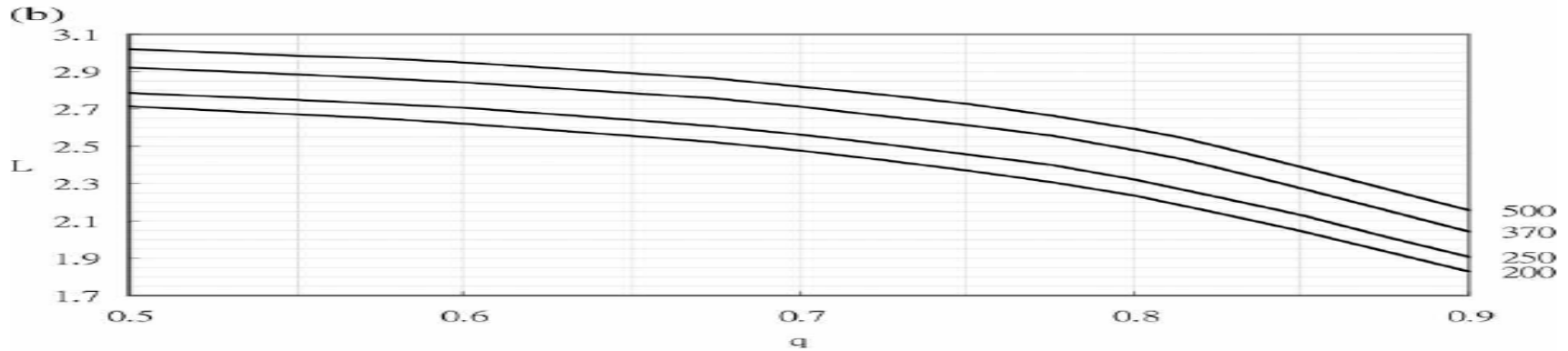
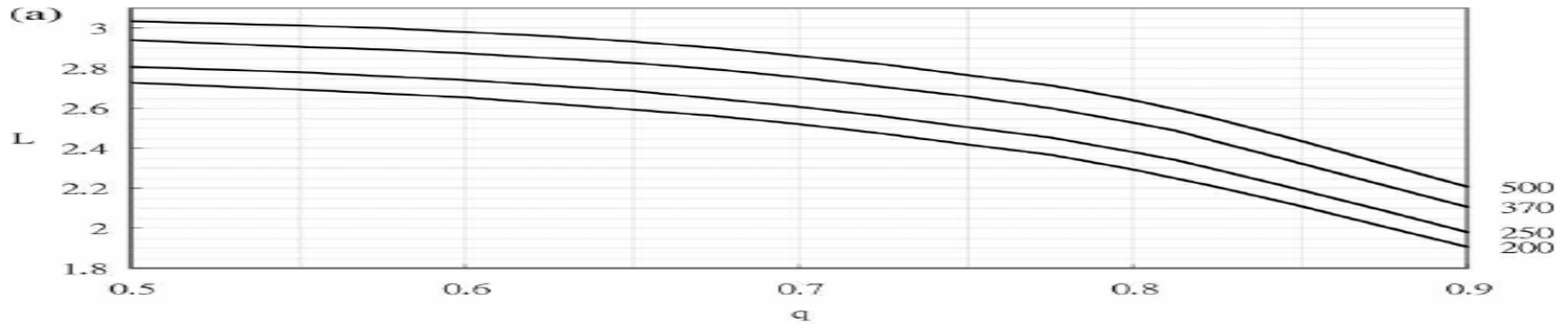


Table 4. Examples of the GWMA, DGWMA and DEWMA control charts using data for the first 10 observations where $\mu = 0$ and the last 20 observations where the mean has shifted $\mu = 0.8\sigma$. The signals for out-of-control are in bold print.

| t | X_t | G_t | LCL_t | UCL_t | Y_t | LCL_t | UCL_t | Z_t | LCL_t | UCL_t |
|-----|--------|--------------|---------|---------|--------------|---------|---------|--------------|---------|---------|
| 1 | -0.900 | -0.090 | -0.288 | 0.288 | -0.076 | -0.236 | 0.236 | -0.036 | -0.106 | 0.106 |
| 2 | 0.495 | -0.007 | -0.340 | 0.340 | -0.020 | -0.303 | 0.303 | -0.038 | -0.200 | 0.200 |
| 3 | -1.144 | -0.129 | -0.370 | 0.370 | -0.117 | -0.347 | 0.347 | -0.083 | -0.285 | 0.285 |
| 4 | 0.417 | -0.044 | -0.391 | 0.391 | -0.062 | -0.380 | 0.380 | -0.092 | -0.358 | 0.358 |
| 5 | -0.215 | -0.067 | -0.407 | 0.407 | -0.077 | -0.404 | 0.404 | -0.103 | -0.419 | 0.419 |
| 6 | -0.119 | -0.067 | -0.420 | 0.420 | -0.078 | -0.424 | 0.424 | -0.110 | -0.467 | 0.467 |
| 7 | 0.910 | 0.035 | -0.430 | 0.430 | 0.007 | -0.439 | 0.439 | -0.074 | -0.506 | 0.506 |
| 8 | 0.386 | 0.045 | -0.439 | 0.439 | 0.031 | -0.452 | 0.452 | -0.033 | -0.536 | 0.536 |
| 9 | 0.865 | 0.111 | -0.446 | 0.446 | 0.096 | -0.462 | 0.462 | 0.030 | -0.560 | 0.560 |
| 10 | 0.050 | 0.077 | -0.452 | 0.452 | 0.083 | -0.471 | 0.471 | 0.070 | -0.577 | 0.577 |
| 11 | 1.194 | 0.181 | -0.457 | 0.457 | 0.173 | -0.478 | 0.478 | 0.141 | -0.591 | 0.591 |
| 12 | 0.301 | 0.157 | -0.461 | 0.461 | 0.172 | -0.485 | 0.485 | 0.193 | -0.601 | 0.601 |
| 13 | -0.367 | 0.089 | -0.465 | 0.465 | 0.121 | -0.490 | 0.490 | 0.204 | -0.608 | 0.608 |
| 14 | 0.489 | 0.135 | -0.469 | 0.469 | 0.153 | -0.494 | 0.494 | 0.222 | -0.614 | 0.614 |
| 15 | 1.613 | 0.270 | -0.472 | 0.472 | 0.271 | -0.498 | 0.498 | 0.290 | -0.618 | 0.618 |
| 16 | 0.146 | 0.211 | -0.474 | 0.474 | 0.245 | -0.501 | 0.501 | 0.327 | -0.620 | 0.620 |
| 17 | -0.319 | 0.146 | -0.477 | 0.477 | 0.193 | -0.504 | 0.504 | 0.325 | -0.623 | 0.623 |
| 18 | -0.399 | 0.098 | -0.479 | 0.479 | 0.144 | -0.507 | 0.507 | 0.295 | -0.624 | 0.624 |
| 19 | 1.106 | 0.212 | -0.481 | 0.481 | 0.229 | -0.509 | 0.509 | 0.308 | -0.625 | 0.625 |
| 20 | 1.046 | 0.269 | -0.482 | 0.482 | 0.288 | -0.511 | 0.511 | 0.346 | -0.626 | 0.626 |
| 21 | -0.069 | 0.205 | -0.484 | 0.484 | 0.248 | -0.512 | 0.512 | 0.354 | -0.626 | 0.626 |
| 22 | 1.329 | 0.315 | -0.485 | 0.485 | 0.338 | -0.514 | 0.514 | 0.398 | -0.627 | 0.627 |
| 23 | 1.851 | 0.433 | -0.487 | 0.487 | 0.453 | -0.515 | 0.515 | 0.484 | -0.627 | 0.627 |
| 24 | 0.493 | 0.384 | -0.488 | 0.488 | 0.438 | -0.516 | 0.516 | 0.539 | -0.627 | 0.627 |
| 25 | 1.534 | 0.478 | -0.489 | 0.489 | 0.522 | -0.517 | 0.517 | 0.615 | -0.627 | 0.627 |
| 26 | -0.813 | 0.304 | -0.490 | 0.490 | 0.394 | -0.518 | 0.518 | 0.606 | -0.627 | 0.627 |
| 27 | 1.207 | 0.411 | -0.491 | 0.491 | 0.467 | -0.518 | 0.518 | 0.624 | -0.627 | 0.627 |
| 28 | 1.479 | 0.491 | -0.491 | 0.491 | 0.542 | -0.519 | 0.519 | 0.670 | -0.627 | 0.627 |
| 29 | 0.017 | 0.404 | -0.492 | 0.492 | 0.484 | -0.520 | 0.520 | 0.673 | -0.627 | 0.627 |
| 30 | 2.148 | 0.575 | -0.493 | 0.493 | 0.622 | -0.520 | 0.520 | 0.734 | -0.627 | 0.627 |