Planning of progressive group-censoring life tests with cost considerations

出處：Journal of Applied Statistics

作者 : Shuo-JyeWu

報告學生：陳怡璇

指導老師：童超塵　教授

Content

- Abstract
- Introduction
- Optimal plans
- Remark
- Numerical example
- Sensitivity analysis
- Influence of estimated distribution parameters
- Influence of cost parameters
- Conclusion

Abstract

- 本文認為壽命測試下型一逐步設限(Type-I censoring)用Weibull故障時間分佈。最大似然法用於推導出估計的參數的故障時間分佈。
- 不適當的設置決策變量不僅浪費了資源，而且降低了實驗的精確估計。
- 本文提供了一種算法來求解最佳決策變量考慮三種進行了研究。
- **Keywords**：A -最佳化D -最佳化E-最佳化，逐步設限，最大概似估計法;逐步設限; Weibull分佈

Introduction

- 一般常用的設限計畫有兩種:
  - 第一種是在試驗執行前先指定每階段實驗的時間長度, 並在試驗終止時移除未失效的物件, 此種設限計畫稱為型一設限(Type-I censoring) , 型I 設限下得到的資料為在給定的時間內的物件失效資訊
  - 另一種設限計畫則是在執行試驗前先指定每一階段欲觀察的物件失效個數,而當試驗進行到指定失效個數發生時即停止, 以進行下一階段, 至試驗終止; 此時得到的資料則為達到特定物件失效個數的時間, 此為型二設限計畫(Type-II censoring)

Model description and parameter estimation

- 設隨機變量 X具有Weibull分佈的機率密度函數和累積分佈函數

$$f(x) = \frac{\nu}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\nu-1} e^{-(x/\theta)^{\nu}}, \quad x > 0,$$

$$F(x) = 1 - e^{-(x/\theta)^{\nu}}, \quad x > 0, \qquad (1)$$

- 其中θ > 0和v > 0是參量

- 設n個獨立單位，同時放置在一個壽命試驗在時間0時至$\tau 1$,，有n1計數不合格的單位的數量，並且r1存活單位從測試被去除; 從时间$\tau 1$,開始， n – n1 – r1非被去除的生存單位直到时间$\tau 2$,，失敗$n2$個數量，並且r2存活單位從測試被去除等等。 在τk不合格的單位保持nk個數 $r_k = n - \sum_{i=1}^{k} n_i - \sum_{j=1}^{k-1} r_j$

- 0 until time τ1 n1 failed r1存活從測試被去除
- τ1 until time τ2 n2 failed r2存活從測試被去除
- At time τk nk failed $r_k = n - \sum_{i=1}^{k} n_i - \sum_{j=1}^{k-1} r_j$

去除全部單位而終止測試的

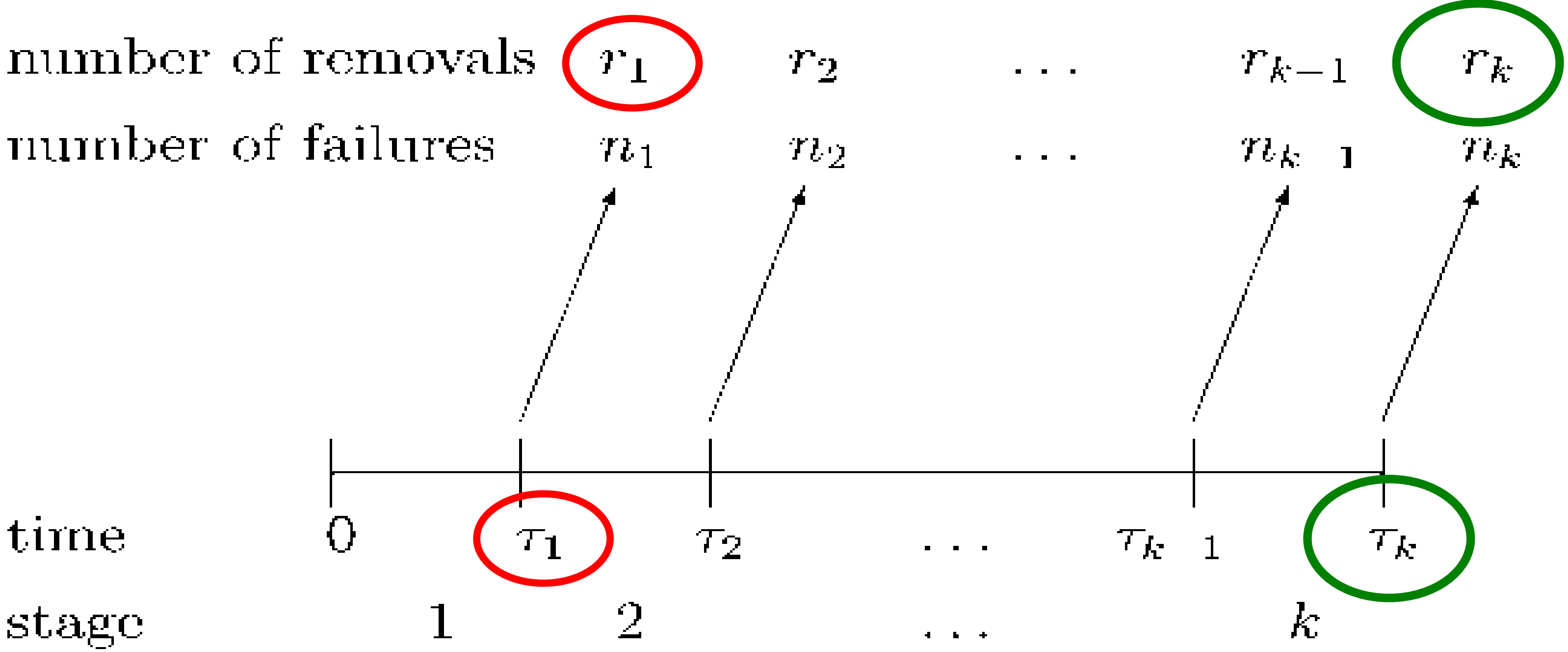

图1. k級逐步型I設限

- 假設$r_1, r_2, \ldots, r_k$的值是由預先指定的百分比，其餘的清除單位為$p_1, p_2, \ldots, p_k$，也就是說$r_i = (m_i - n_i)p_i$，當其中非被去除的存活單位 $m_i = n - \sum_{j=1}^{i-1} n_j - \sum_{j=1}^{i-1} r_j$，$i = 1, 2, \ldots, k$. 然後可得

$$N_i | n_{i-1}, \ldots, n_1, r_{i-1}, \ldots, r_1 \sim \text{binomial}(m_i, q_i)$$

where $q_i = (F(\tau_i) - F(\tau_{i-1})/1 - F(\tau_{i-1})) = 1 - e^{-[(\tau_i/\theta)^\nu - (\tau_{i-1}/\theta)^\nu]}$ is the probability that a unit survives at time τ_{i-1} and will fail before time τ_i, for $i = 1, 2, \ldots, k$, where $\tau_0 = 0$ and the function $F(\cdot)$ is defined in Equation (1).

Let $h_i = (\tau_i/\theta)^\nu - (\tau_{i-1}/\theta)^\nu$, $i = 1, 2, \ldots, k$. The log-likelihood function can be written as

$$\log L(\theta, \nu) \propto \sum_{i=1}^{k} [n_i \log(1 - e^{-h_i}) - (m_i - n_i)h_i]. \tag{2}$$

因此，並且最大概似法估計物(MLEs) θ和v可以通过直接最大化式得到(2)。 θ和v的可能等式是

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log L(\theta, \nu) = \sum_{i=1}^{k} \left[n_i \frac{e^{-h_i} \partial h_i / \partial \theta}{1 - e^{-h_i}} - (m_i - n_i) \frac{\partial h_i}{\partial \theta} \right]$$

and

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \log L(\theta, \nu) = \sum_{i=1}^{k} \left[n_i \frac{e^{-h_i} \partial h_i / \partial \nu}{1 - e^{-h_i}} - (m_i - n_i) \frac{\partial h_i}{\partial \nu} \right],$$

MLEs ˆ θ和ˆ v可以通過解決可能等式得到。但不可能分析這些等式，必须使用Newton–Raphson

The asymptotic normal distribution for the MLEs can be derived in the usual way. From the log-likelihood function in Equation (2), we have

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log L(\theta,\nu)=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(1-e^{-h_i})^2}\left\{n_i\left[-e^{-h_i}\left(\frac{\partial h_i}{\partial\theta}\right)^2+(1-e^{-h_i})\frac{\partial^2 h_i}{\partial\theta^2}\right]\right.$$
$$\left.-m_i\frac{\partial^2 h_i}{\partial\theta^2}(1-e^{-h_i})^2\right\}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\log L(\theta,\nu)=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(1-e^{-h_i})^2}\left\{n_i\left[-e^{-h_i}\left(\frac{\partial h_i}{\partial\nu}\right)^2+(1-e^{-h_i})\frac{\partial^2 h_i}{\partial\nu^2}\right]\right.$$
$$\left.-m_i\frac{\partial^2 h_i}{\partial\nu^2}(1-e^{-h_i})^2\right\}, \tag{4}$$

and

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta\,\partial\nu}\log L(\theta,\nu)=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(1-e^{-h_i})^2}\left\{n_i\left[-e^{-h_i}\frac{\partial h_i}{\partial\theta}\frac{\partial h_i}{\partial\nu}+(1-e^{-h_i})\frac{\partial^2 h_i}{\partial\theta\,\partial\nu}\right]\right.$$
$$\left.-m_i\frac{\partial^2 h_i}{\partial\theta\partial\nu}(1-e^{-h_i})^2\right\}, \tag{5}$$

where

$$\frac{\partial^2 h_i}{\partial\theta^2}=\frac{\nu(\nu+1)}{\theta^2}\left[\left(\frac{\tau_i}{\theta}\right)^\nu-\left(\frac{\tau_{i-1}}{\theta}\right)^\nu\right],$$
$$\frac{\partial^2 h_i}{\partial\nu^2}=\left(\frac{\tau_i}{\theta}\right)^\nu\left[\log\left(\frac{\tau_i}{\theta}\right)\right]^2-\left(\frac{\tau_{i-1}}{\theta}\right)^\nu\left[\log\left(\frac{\tau_{i-1}}{\theta}\right)\right]^2$$

and

$$\frac{\partial^2 h_i}{\partial\theta\partial\nu}=-\frac{1}{\theta}\left[\left(\frac{\tau_i}{\theta}\right)^\nu-\left(\frac{\tau_{i-1}}{\theta}\right)^\nu\right]-\frac{\nu}{\theta}\left[\left(\frac{\tau_i}{\theta}\right)^\nu\log\left(\frac{\tau_i}{\theta}\right)-\left(\frac{\tau_{i-1}}{\theta}\right)^\nu\log\left(\frac{\tau_{i-1}}{\theta}\right)\right].$$

- 要得到Fisher's information，我們需要期望式(3)- (5)。 要得到此，讓我們計算Mi的期望，為i = 1， 2， …， k。 從有條件期望特性

$$E(N_i) = E(M_i)q_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Now, beginning with $E(M_1) = n$, $R_i = (M_i - N_i)p_i$ and $M_{i+1} = M_i - N_i - R_i$, we obtain, by induction,

$$E(M_i) = n\prod_{j=1}^{i-1}(1-q_j)(1-p_j), \quad i = 2, 3, \ldots, k.$$

Hence, the Fisher's information matrix is

$$\mathbf{I}(\theta, v) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{k} E(M_i)\dfrac{(\partial q_i/\partial\theta)^2}{q_i(1-q_i)} & \sum_{i=1}^{k} E(M_i)\dfrac{(\partial q_i/\partial\theta)(\partial q_i/\partial v)}{q_i(1-q_i)} \\ \sum_{i=1}^{k} E(M_i)\dfrac{(\partial q_i/\partial\theta)(\partial q_i/\partial v)}{q_i(1-q_i)} & \sum_{i=1}^{k} E(M_i)\dfrac{(\partial q_i/\partial v)^2}{q_i(1-q_i)} \end{bmatrix},$$

where

$$\frac{\partial q_i}{\partial \theta} = e^{-h_i} \frac{\partial h_i}{\partial \theta} \quad \text{and} \quad \frac{\partial q_i}{\partial v} = e^{-h_i} \frac{\partial h_i}{\partial v}.$$

對於一個大的樣本數，極大似然估計（θ，v）有一個近似二元正態分佈，均值向量（θ，v）和方差協方差矩陣I - 1（θ，v）。因此，近似置信區間或置信區間為θ，v可以很容易地建立

Optimal plans

- 為了獲得精確的估計壽命參數，常見問題包括：有多少單位需要測試？實驗者需要試驗多久？實驗者需要多少次壽命測試？
- 簡單地說，更多的測試單位，更多的測試時間和數目越多的檢查會產生更多的信息，從而提高了精度估計。
- 在實踐中，一個實驗預算是有限的。因此獲得一個存活參數的精確估計的成本限制下的實驗是一個重要的可靠性分析問題

- 在這項研究中，我們假設，檢查間隔時間的長度是全部均等。 讓n表示單位的數量在測試檢查k的數量和T的檢查間隔時間的長度。 實驗的費用包括以下四個零件：
  - 安裝成本
  - 樣品費用
  - 檢查費用
  - 營運成本

- (1)安裝成本：這是安裝所有的成本在開始測試單位的存活實驗Ca。它不依賴於檢驗單位的數量。
- (2)樣品費用：這是測試成本的單位。讓Cs是一個測試單位成本。然後，總樣本的成本是nCs。
- (3)檢查費用：此費用包括成本使用的檢測設備和材料。這取決於有多少次檢查。讓Ci表示的檢查成本。總檢驗成本是kCi。
- 4)營運成本：包括經營者的薪金、水電費，折舊和測試設備等這是成正比的測試時間。讓Co成為運營的成本之間的時間間隔兩次檢查。總營運成本kτCo

- 因此，實驗的總成本是： $C_T = C_a + nC_s + kC_i + k\tau C_o$.

- 注意漸進變化協變性矩陣$I^{-1}(\theta, v)$MLEs $\hat{\theta}$和$\hat{v}$是n、k和τ的作用。 為一個具體計劃(n， k，τ)，我們可以計算MLEs的漸進變化協變性矩陣。 我們想要確定最佳的計劃G(n， k， τ)在費用考慮之下。從參量(θ， v)二維，最優性可以被定義根據以下標準：
  - (1)D最佳化： 最小的行列式的漸近方差協方差矩陣。
  - (2)A最佳化： 最小的痕跡漸近方差協方差矩陣。
  - (3)E最佳化： 最小化的最大特徵值的漸近方差協方差矩陣。

- D最佳化提供估計的可變性一項整體措施。然而，A最佳化並且E最佳化不執行所有可用的參數信息。 簡而言之，讓函數*G(n, k, τ)*要盡量減少在每個標準。
- 最佳化設计問題在發現包括n、k和τ，使G (n， k，τ) 減到最小。 但是測定n, k,和τ是僅Cr限於預算的實驗 因此，最佳的設計表示如下：

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad && G(n, k, \tau) \\
&\text{subject to} \quad && C_a + nC_s + kC_i + k\tau C_o \le C_r \qquad (6) \\
& && k, n \in \mathcal{N}, \quad k \ge 1, \quad \text{and } \tau > 0,
\end{aligned}
$$

- n表示单位的数量在測試、k檢查的数量和τ的檢查間隔時間的長度

- 其中N為正整數集。由於目標函數和約束函數都是非線性的決策變量n，K和T，這是很難獲得一個封閉的形式解決方案。因此，為了找到問題的最優解非線性混合整數規劃，我們成立了下面的算法
  - Step 0，設置了費用參量Ca, Cs, Ci, Co,和 Cr的價值，並且給參量θ和v的價值。
  - Step 1，計算的人數上限的試驗裝置。在總試驗成本約束，上界是

$$\bar{n} = \left[\frac{C_r - C_a - C_i}{C_s}\right],$$

其中[x]是最大的整數，它是小於或等於 x。

- Step 2 Set n = 2.
- Step 3 計算上界使用約束總試驗成本和給定值的n

$$\tilde{k}_n = \left[\frac{C_r - C_a - nC_s}{C_i}\right].$$

- Step 4 計計算長度的檢查間隔。使用限制總試驗成本，對所有的k ∈的N， 1 ≤ k ≤ ˜kn，計算檢查間隔時間的長度

$$\tau_{k_n} = \frac{C_r - C_a - nC_s - kC_i}{kC_o}$$

- 並且計算目標函数的對應的價值 G(n, k, τkn)

Step 5 Let function $F(n) = G(n, k_n, \tilde{\tau}_{k_n}) = \min_{1 \leq k \leq \tilde{k}_n} G(n, k, \tau_{k_n})$.

Step 6 Set $n = n + 1$. If $n \leq \tilde{n}$ go to Step 3, else go to Step 7.

Step 7 Compute the optimal value of the objective function; that is, $F(n^*) = \min_{2 \leq n \leq \tilde{n}} F(n) = G(n^*, k^*, \tau^*) = \min_{2 \leq n \leq \tilde{n}} G(n, k_n, \tilde{\tau}_{k_n})$.

- Step 8最佳化設計獲得(n∗, k∗, τ∗) 。

Remark

(1)在Step 0， 在步驟 0，θ，v值通常是未知之數。因此我們可以使用之前的資料或數據從一個試驗測試以取得估計

(2)在第1步，上界檢驗單位的數量~n的計算如下。從方程（6）我們有$C_a + nC_s + kC_i + k\tau C_o \le C_r$, $k \ge 1$, 導致 $nC_s + C_i + \tau C_o \le C_r - C_a$由於$\tau > 0$很容易看出，$nC_s + C_i \le C_r - C_a$. 這意味著

$$n \le \frac{C_r - C_a - C_i}{C_s}.$$

因此，n是上界

$$\tilde{n} = \left\lfloor \frac{C_r - C_a - C_i}{C_s} \right\rfloor.$$

我們可以也使用一個相似的論點據獲得上界k給定值n和檢查頻率*τkn*特定價值的k和n。

Numerical example

- 我們運用提出的方法於一個數字例子。從Aggarwala使用一種算法[1]產生的數據與n = 15， k = 5， τ = 2， θ = 4.8和v = 1.5。 撤除的被預先指定的百分比是(p1、p2、p3、p4，p5) = (0.25， 0.25， 0.4， 0.5， 1)。
- 數據在表1.被提出。我們分別獲得θ and v to be ˆ θ = 4.7969 and ˆv = 1.3789。

Table 1. Progressively group-censored sample.

i	1	2	3	4	5
n_i	4	3	3	0	1
r_i	2	1	0	1	0
p_i	0.25	0.25	0.4	0.5	1

- 我們利用這些估計我們在設計新的實驗。假設移除比例是p1 = p2 = · · · = pk−1 = 0.25和pk = 1. 進一步假設費用參量的值是如下：Ca = $10，Cs = $85/unit， Ci = $3.25， Co = $3/10 h和Cr = $6000。 因此，最佳化設計的問題是：

$$\text{minimize} \quad G(n, k, \tau)$$

$$\text{subject to} \quad 10 + 85n + 3.25k + 3k\tau \leq 6000.$$

  - Ca安裝成本Cs樣品費用Ci檢查費用Co營運成本

- 我們可以得到最佳的設計如下：

$$\text{D-optimality:}\quad n^* = 69,\quad k^* = 11,\quad \tau^* = 2.7045$$

$$\text{A-optimality:}\quad n^* = 69,\quad k^* = 11,\quad \tau^* = 2.7045$$

$$\text{E-optimality:}\quad n^* = 70,\quad k^* = 3,\quad \tau^* = 3.3611.$$

Sensitivity analysis

- 我們現在研究靈敏度在不同的參數值與生活相關的最佳解變化的實驗。這些參數可以分為兩部分：
  - （1）失敗的參數的故障時間分佈，即，θ，v;
  - （2）參數的實驗成本，即Ca, Cs, Ci, Co, and Cr

- 我們將分別研究最佳方案如何影響被發行參量的估計和被實驗的費用參量在第5.1部分和第5.2部分的。

Influence of estimated distribution parameters

- 正如我們在第3節中提到，在實踐中分佈參數值通常未知的，我們必須從小規模試驗的預先的信息或數據得到他們的估計。然而沒有人能夠保證這些估計正好等於未知參數。因此，在這一小節中，我們將討論影響參數估計值的變化對最優的解決方案。

- θ在獲得的MLEs和v第4部分分別為ˆ θ = 4.7969 和ˆ v = 1.3789。對應漸近標準偏差是1.1366和0.4411。
- 因此， θ和v的95%近似信賴区间分別為(2.5692， 7.0246)和(0.5144， 2.2435)。我們選擇θ和v的值在他們的95%近似信賴區间的敏感度分析集(Ca,Cs,Ci,Co,Cr) = (10， 85， 3.25， 3， 6000)，成本參數用於在第4節。n的最佳方案在表2.

Table 2. Optimal values of n, k, and τ for fixed $C_a = 10$, $C_s = 85$, $C_i = 3.25$, $C_o = 3.0$, and $C_r = 6000$ with $p = 0.25$.

Criterion	θ	ν	n	k	τ	$k\tau$	$G(n, k, \tau)$
D-optimality	2.5692	0.5144	69	14	1.8929	26.5000	0.0069
		1.3789	69	17	1.3676	23.2500	0.0026
		2.2435	70	6	1.1389	6.8333	0.0023
	4.7969	0.5144	69	10	3.0833	30.8333	0.0247
		1.3789	69	11	2.7045	29.7500	0.0091
		2.2435	69	12	2.3889	28.6667	0.0079
	7.0246	0.5144	68	12	4.7500	57.0000	0.0537
		1.3789	69	9	3.5463	31.9167	0.0195
		2.2435	69	9	3.5463	31.9167	0.0169
A-optimality	2.5692	0.5144	70	5	1.5833	7.9167	0.5468
		1.3789	69	17	1.3676	23.2500	0.1084
		2.2435	70	6	1.1389	6.8333	0.1060
	4.7969	0.5144	69	11	2.7045	29.7500	1.8768
		1.3789	69	11	2.7045	29.7500	0.2843
		2.2435	69	12	2.3889	28.6667	0.1803
	7.0246	0.5144	69	8	4.1250	33.0000	4.0139
		1.3789	69	8	4.1250	33.0000	0.5650
		2.2435	69	8	4.1250	33.0000	0.2956
E-optimality	2.5692	0.5144	70	5	1.5833	7.9167	0.5314
		1.3789	70	5	1.5833	7.9167	0.0728
		2.2435	70	6	1.1389	6.8333	0.0766
	4.7969	0.5144	69	11	2.7045	29.7500	1.8635
		1.3789	70	3	3.3611	10.0833	0.2475
		2.2435	70	4	2.2500	9.0000	0.1046
	7.0246	0.5144	69	8	4.1250	33.0000	4.0001
		1.3789	69	8	4.1250	33.0000	0.5280
		2.2435	69	8	4.1250	33.0000	0.2158

n表示在測試的数量单位、k檢查的数量和τ的檢查間隔時間的長度

Table 3. D-optimal values of n, k, and τ for different costs values under $\theta = 4.7969$ and $\nu = 1.3789$ with $p = 0.25$.

C_a	C_s	C_i	C_o	C_r	n	k	τ	$k\tau$
10	85	3.25	3.0	4000	46	7	2.7262	19.0833
				5000	58	5	2.9167	14.5833
				6000	69	11	2.7045	29.7500
				7000	81	10	2.4167	24.1667
				8000	93	8	2.4583	19.6667
10	85	3.25	1.0	6000	70	7	2.4643	17.2500
			2.0		69	15	2.5417	38.1250
			3.0		69	11	2.7045	29.7500
			4.0		69	9	2.6597	23.9375
			5.0		69	8	2.4750	19.8000
10	85	0.75	3.0	6000	69	15	2.5278	37.9167
		2.00			69	13	2.5385	33.0000
		3.25			69	11	2.7045	29.7500
		4.50			69	10	2.6667	26.6667
		5.75			69	9	2.7130	24.4167
10	55	3.25	3.0	6000	107	10	2.4167	24.1667
	70				79	6	2.5278	15.1667
	85				69	11	2.7045	29.7500
	100				59	8	2.6667	21.3333
	115				51	11	2.7045	29.7500
6	85	3.25	3.0	6000	69	12	2.5000	30.0000
8					69	12	2.4444	29.3333
10					69	11	2.7045	29.7500
12					69	11	2.6439	29.0833
14					69	11	2.5833	28.4167

Table 4. A-optimal values of n, k, and τ for different cost values under $\theta = 4.7969$ and $\nu = 1.3789$ with $p = 0.25$.

C_a	C_s	C_i	C_o	C_r	n	k	τ	$k\tau$
10	85	3.25	3.0	4000	46	7	2.7262	19.0833
				5000	58	5	2.9167	14.5833
				6000	69	11	2.7045	29.7500
				7000	81	9	2.8056	25.2500
				8000	93	7	2.9643	20.7500
10	85	3.25	1.0	6000	70	7	2.4643	17.2500
			2.0		69	14	2.8393	39.7500
			3.0		69	11	2.7045	29.7500
			4.0		69	9	2.6597	23.9375
			5.0		69	7	2.9214	20.4500
10	85	0.75	3.0	6000	70	4	3.0833	12.3333
		2.00			69	12	2.8056	33.6667
		3.25			69	11	2.7045	29.7500
		4.50			69	10	2.6667	26.6667
		5.75			69	9	2.7130	24.4167
10	55	3.25	3.0	6000	107	9	2.8056	25.2500
	70				84	9	2.9907	26.9167
	85				69	11	2.7045	29.7500
	100				59	8	2.6667	21.3333
	115				51	11	2.7045	29.7500
6	85	3.25	3.0	6000	69	11	2.8258	31.0833
8					69	11	2.7652	30.4167
10					69	11	2.7045	29.7500
12					69	10	3.0167	30.1667
14					69	10	2.9500	29.5000

- 結果n是不敏感的變化，這些參數值的所有三個標準。長度的檢查間隔時間τ和終止實驗*kτ*都是非增功能v為D -最佳化。長度的檢查間隔時間τ和終止實驗*kτ*也在增加功能θ的所有三個標準。上面的兩個參數之間的關係和實驗物理的時間可以解釋受到平均壽命是Weibull分佈。
  - Note，平均壽命為$\theta\Gamma(1+1/\nu)$其中: $\Gamma(\cdot)$ 是伽瑪函數。增量參數θ（v）導致大（小）壽命試驗裝置，並導致一長（短）實驗時間

Influence of cost parameters

- 成本費用參數變化的實驗會影響測定的優化設計。讓我們考慮分佈參數的值θ= 4.7969，v= 1.3789。使用這些值的分佈參數，靈敏度每個決策變量n，k和τ的變化，成本參數的實驗研究
- 表3-5顯示，高價值的Cr會導致更高的價值*n*;檢驗單位的數量n是不敏感的變化，*Ca*, *Ci*與*Co*;和更大的價值*Cs*結果在一個較小的值對於所有的n這三項標準。此外，長度的檢查間隔時間*τ*和終止實驗*kτ*略有敏感所有費用參數為A -最佳和E -最佳性準則
- 最後，我們也發現可以檢查k的数量對E最佳化標準的所有費用參量是敏感的。 而且 k是高敏感度對在Cr , Co, Ci,和 Cs上的變化在D最佳化標準和A最佳化標準

Table 5. E-optimal values of n, k, and τ for different cost values under $\theta = 4.7969$ and $\nu = 1.3789$ with $p = 0.25$.

C_a	C_s	C_i	C_o	C_r	n	k	τ	$k\tau$
10	85	3.25	3.0	4000	46	7	2.7262	19.0833
				5000	58	5	2.9167	14.5833
				6000	70	3	3.3611	10.0833
				7000	81	9	2.8056	25.2500
				8000	93	7	2.9643	20.7500
10	85	3.25	1.0	6000	69	20	3.0000	60.0000
			2.0		69	14	2.8393	39.7500
			3.0		70	3	3.3611	10.0833
			4.0		69	8	3.0938	24.7500
			5.0		69	7	2.9214	20.4500
10	85	0.75	3.0	6000	70	4	3.0833	12.3333
		2.00			70	4	2.6667	10.6667
		3.25			70	3	3.3611	10.0833
		4.50			70	3	2.9444	8.8333
		5.75			69	9	2.7130	24.4167
10	55	3.25	3.0	6000	108	4	3.0833	12.3333
	70				84	9	2.9907	26.9167
	85				70	3	3.3611	10.0833
	100				59	8	2.6667	21.3333
	115				51	10	3.0833	30.8333
6	85	3.25	3.0	6000	69	11	2.8258	31.0833
8					69	11	2.7652	30.4167
10					70	3	3.3611	10.0833
12					70	3	3.1389	9.4167
14					69	10	2.9500	29.5000

Conclusion

- 確定適當數量的測試單位、數量檢查，檢查的時間長度在有限的預算下的實驗是一個重要的決策問題。
- 我們提出設定最佳化設计算法。使用這種算法，我們可以得到最佳的存活參數估計基於三個不同的標準。
- 最後該方法能帶來更好的設計，進行漸進式設限壽命試驗。它是一個有效地利用資源實現來精確。

牛頓法(Newton-Raphson)尋根

- 我們經常需要求得某線性方程式的根要求得一條方程式 $f(x) = 0$ 的根時，其實有很多種解法但是當這條方程式為非線性時，就沒有辦法使用簡單的推導求得這時候我們即可使用牛頓法來求解

END