

壽命試驗原理與統計分析

授課老師：童超塵 博士

<http://campusweb.yuntech.edu.tw/~qrel/index.htm>

第一版 李佩喜 編輯 2005/7/15

可靠度定義

- 可靠度是由「功能」、「使用條件」、「時間」及「成功機率」四個要素所構成。
- 統計方法可用來解決可靠度的不確定性的問題，以了解成功或失敗的機率。
- 一般稱成功的機率為可靠度，失敗的機率稱作不可靠度。習慣上以 $R(t)$ 表示可靠度， $F(t)$ 表示不可靠度。
- $F(t) + R(t) = 1$

簡易的可靠度估計方法

- 從樣本個數估計可靠度，例如有10個測試樣本，測試8個小時壞掉了2個。在8小時的失敗機率F(t)為
- $F(t=8) = 2/10 = 0.2 \rightarrow$ 成功機率 $R(t=8) = 1 - 0.2 = 0.8$

$$F(t) = \frac{t\text{時間的總失效數 } i_t}{\text{總樣本數 } n}$$

- 某些研究談到真正的失敗機率F(t)應為

$$F(t) = \frac{t\text{時間的總失效數} - 0.3}{\text{總樣本數} + 0.4} = \frac{i_t - 0.3}{n + 0.4}$$

- 所以8小時的失敗機率F(t)為
- $F(t=8) = (2 - 0.3) / (10 + 0.4) = 0.163462$
- $R(t=8) = 1 - 0.163462 = 0.836538$

國立雲林科技大學 工業工程與管理所

第一版 李佩喜 編輯 2005/7/15

簡易的可靠度估計方法

失效數	累加失效數	失效時間	F(t)	R(t)=1-F(t)
1	1	2	0.12963	0.87037
1	2	4	0.314815	0.685185
1	3	8	0.5	0.5
2	5	15	0.87037	0.12963

$$F(t) = \frac{t\text{時間的總失效數} - 0.3}{\text{總樣本數} + 0.4} = \frac{i_t - 0.3}{n + 0.4}$$

$$(5 - 0.3) / (5 + 0.4) = 0.87037$$

中位秩法(Median Rank)

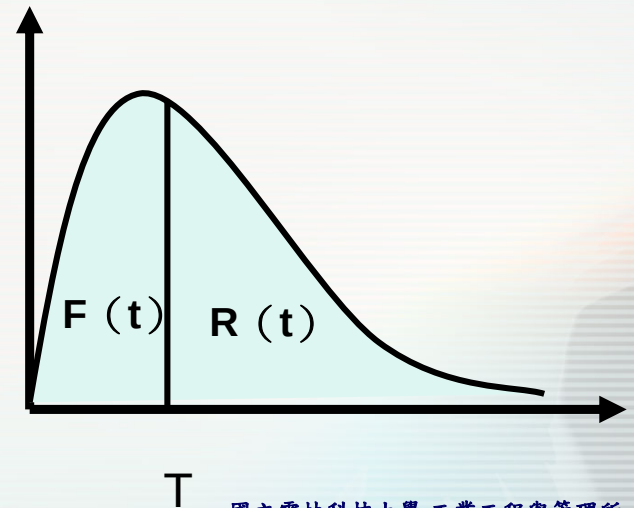
一般稱此簡易可靠度估計方法為**無母數估計法** (Nonparametric Distribution Analysis)

國立雲林科技大學 工業工程與管理所

第一版 李佩喜 編輯 2005/7/15

機率分配可靠度估計

- 無母數估計方法雖然簡易，但是準確度差，屬於間斷資料的估計方法，因此，許多失效時間的可靠度值無法估計。
- 若能找出失效數據的失效機率分配，可以提高可靠度估計的準確度，且可求的任意失效時間點可靠度值。
- 右圖是一個機率分配的機率密度函數 $f(t)$ 圖



國立雲林科技大學 工業工程與管理所

第一版 李佩喜 編輯 2005/7/15

機率分配可靠度估計

- 除了可靠度值之外，失效率分析也是 $\lambda(t)$ 壽命試驗相當重要。
- 至某時點為止還能動作之物件，在接下來的期間內引起失效之比例，稱作失效率，函數以 $\lambda(t)$ 表示

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$



國立雲林科技大學 工業工程與管理所

第一版 李佩喜 編輯 2005/7/15

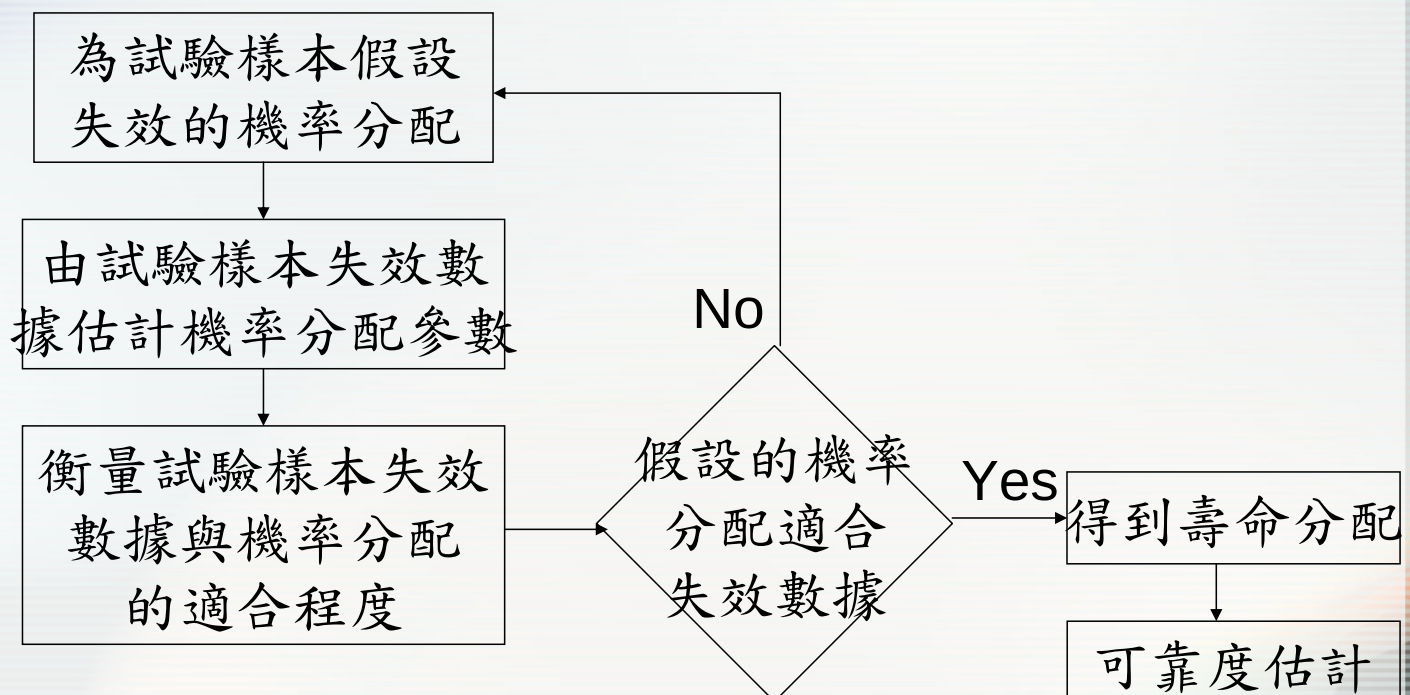
機率分配可靠度估計

- 在可靠度中，常用的失效機率分配有常態分配（Normal Distribution）、對數常態分配（Log-Normal Distribution）、指數分配（Exponential Distribution）、韋伯分配（Weibull Distribution）四種。
- 這些機率分配均有固定的模型，只要透過試驗的失效數據找出這機率分配的參數值，就可以估計不同失效時間點的可靠度值，或特徵壽命值。
- Minitab 除了可分析上述的四個基本的機率分配，另外還多了極值分配（Extreme Value Distribution）、邏輯分配（Logistic Distribution）、對數邏輯分配（Log-Logistic Distribution）的分析功能。

國立雲林科技大學 工業工程與管理系

第一版 李佩喜 編輯 2005/7/15

機率分配可靠度估計



國立雲林科技大學 工業工程與管理系

第一版 李佩喜 編輯 2005/7/15

機率分配可靠度估計-韋伯分配

- 韋伯分配是可靠度中常用的機率分配，機率密度函數如下

$$f(t) = \frac{\beta t^{\beta-1}}{\eta^\beta} e^{\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta\right]}$$

t ：隨機變數，是指失效時間

$$F(t) = 1 - e^{\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta\right]}$$

β 和 η 是等待估計的參數

β ：形狀參數 (Shape parameter)

韋氏斜率 (Slope)

失效模式 (Failure Mode)

$$R(t) = e^{\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta\right]}$$

$$\lambda(t) = \frac{\beta t^{\beta-1}}{\eta^\beta}$$

η ：尺度參數 (Scale parameter)

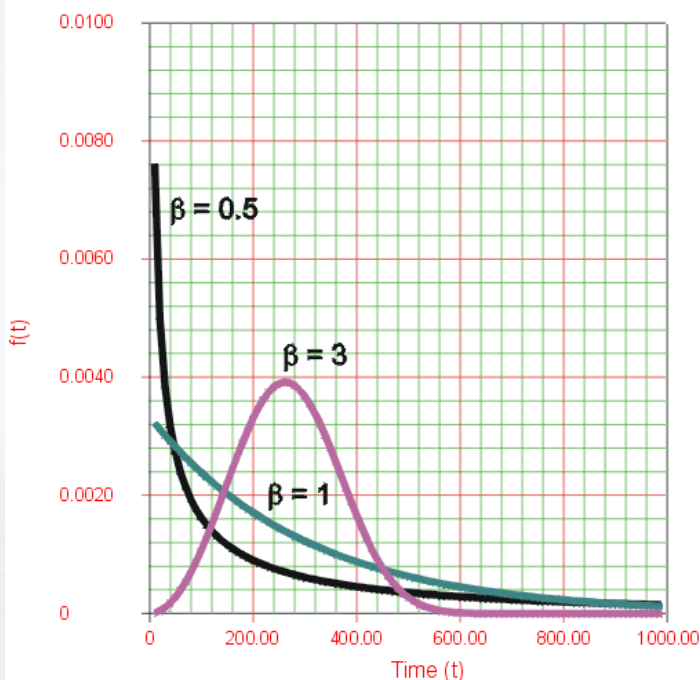
特徵壽命 (Characteristic life)

國立雲林科技大學 工業工程與管理所

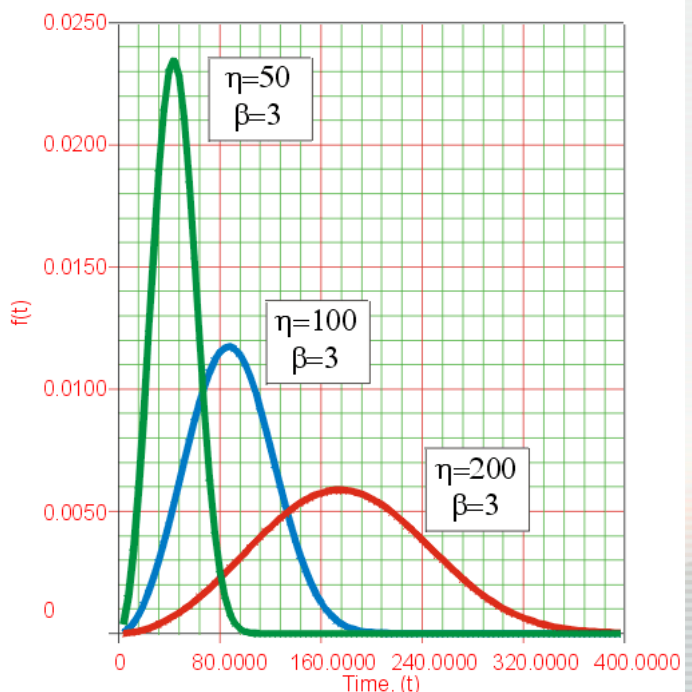
第一版 李佩喜 編輯 2005/7/15

機率分配可靠度估計-韋伯分配

Weibull pdf with $0 < \beta < 1$, $\beta = 1$, and $\beta > 1$



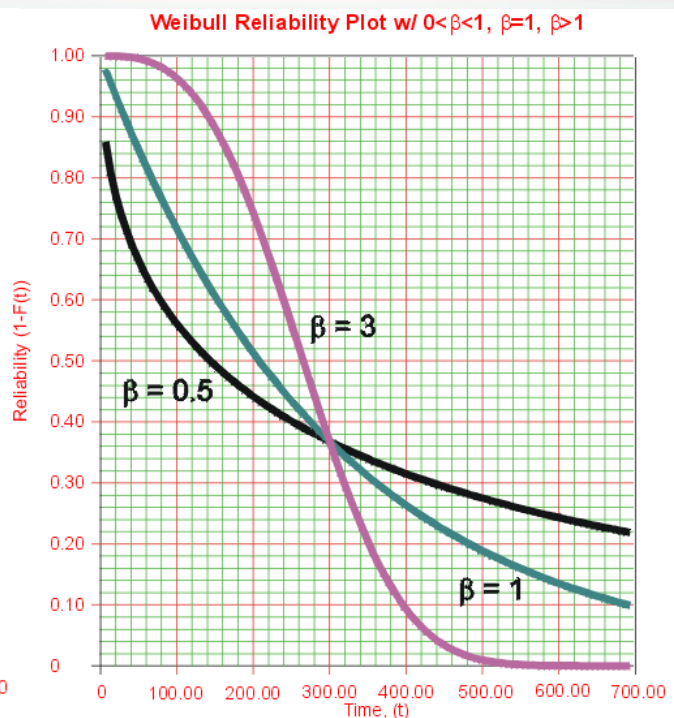
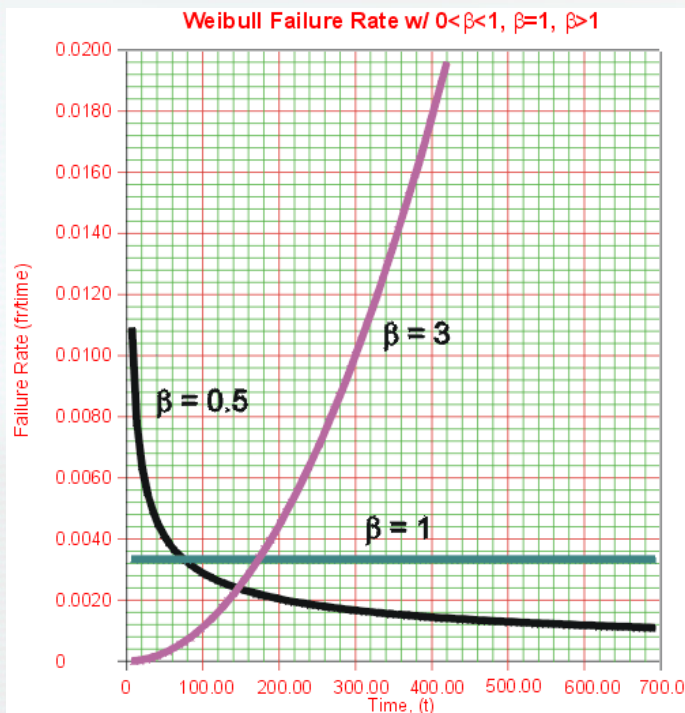
Weibull pdf Plot with Varying Values of η



國立雲林科技大學 工業工程與管理所

第一版 李佩喜 編輯 2005/7/15

機率分配可靠度估計-韋伯分配



國立雲林科技大學 工業工程與管理所

第一版 李佩喜 編輯 2005/7/15

機率分配可靠度估計-韋伯分配

- 決定 β 和 η 的方法有最大概似估計法 (Maximum Likelihood ; MLE) 和機率紙圖解法 (Probability Plotting)，韋伯分配的 β 和 η MLE 如下

$$\frac{1}{\hat{\beta}} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i^{\hat{\beta}} \ln t_i}{\sum_{i=1}^n t_i^{\hat{\beta}}} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln t_i \quad \hat{\eta} = \left[n^{-1} \sum_{i=1}^n t_i^{\hat{\beta}} \right]^{\frac{1}{\hat{\beta}}}$$

- MLE 的方法，所得到的參數估計值較為準確，但某些機率分配的 MLE 式不易計算，例如韋伯分配，相較之下，機率紙圖解法的參數估計就簡單多了，但其準確度較差。

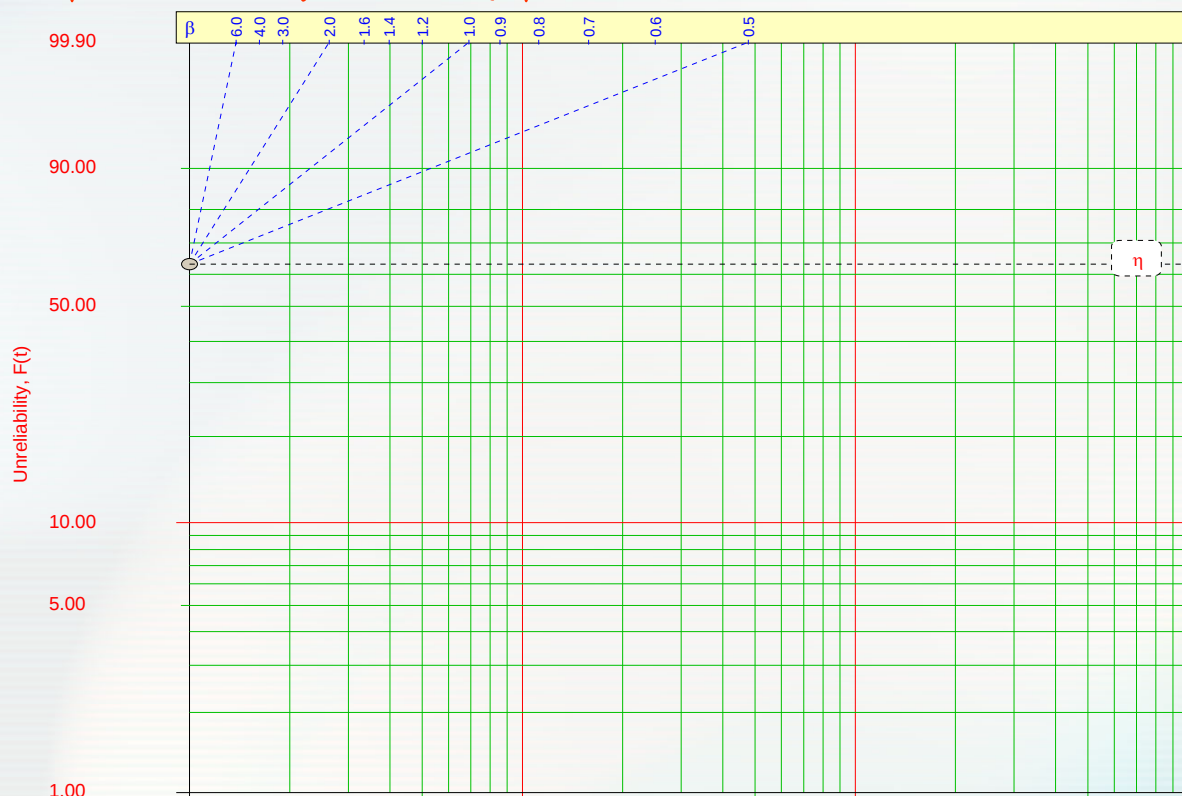
國立雲林科技大學 工業工程與管理所

第一版 李佩喜 編輯 2005/7/15

機率分配可靠度估計-韋伯分配

ReliaSoft's Weibull++ 6.0 - www.Weibull.com

韋伯分配專用的機率紙

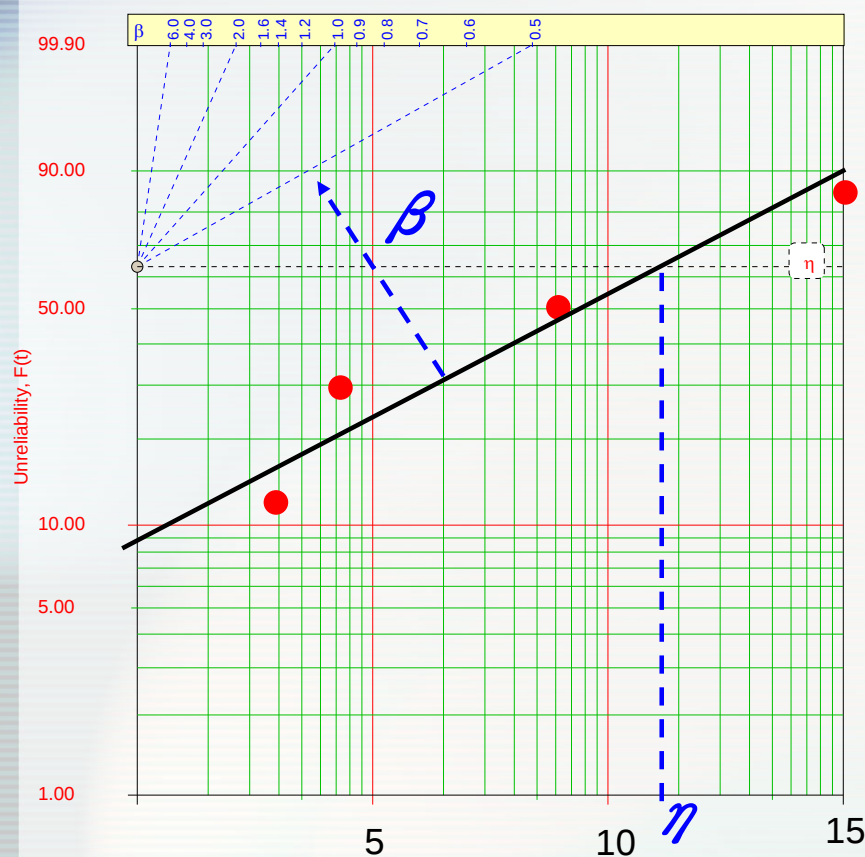


國立雲林科技大學 工業工程與管理所

第一版 李佩喜 編輯 2005/7/15

機率分配可靠度估計-韋伯分配

ReliaSoft's Weibull++ 6.0 - www.Weibull.com



失效時間	F(t)
2	0.12963
4	0.314815
8	0.5
15	0.87037

$$F(t) = \frac{i_t - 0.3}{n + 0.4}$$

β 約為 0.5

η 約為 10.4

失效時間

國立雲林科技大學 工業工程與管理所

第一版 李佩喜 編輯 2005/7/15

機率分配可靠度估計-韋伯分配

- 韋伯機率紙上的直線配適，是失效數據的點最小誤差直線，直線的配適方法可採用迴歸分析中的最小平方法，因此機率紙法也稱作最小平方法參數估計。
- 如果機率紙上的點和線相當接近，則表示此失效數據相當符合所假設的機率分配。如果機率紙上的點並非直線可配適，表示失效數據與假設的機率分配不符。
- 直線的斜率為韋伯分配的形狀參數（Shape parameter），63.2%失效機率的時間點為特徵壽命（尺度參數Scale parameter）。對於其他機率分配的機率紙而言，直線斜率會是尺度參數，位置參數（Location parameter）才是特徵壽命。
- 每種機率分配都有各自的機率紙，不能混合使用。每個機率分配的特徵壽命失效機率值並不一定相同。

國立雲林科技大學 工業工程與管理所

第一版 李佩喜 編輯 2005/7/15

機率分配可靠度估計

機率分配	位置參數 (特徵壽命)	尺度參數 (失效模式)
常態 & 對數常態	μ	σ
極值 Extreme Value	λ	δ
邏輯 (Logistic) & 對數 邏輯 (Log-Logistic)	μ	σ

機率分配	尺度參數 (特徵壽命)	形狀參數 (失效模式)
韋伯 & 指數	η	β

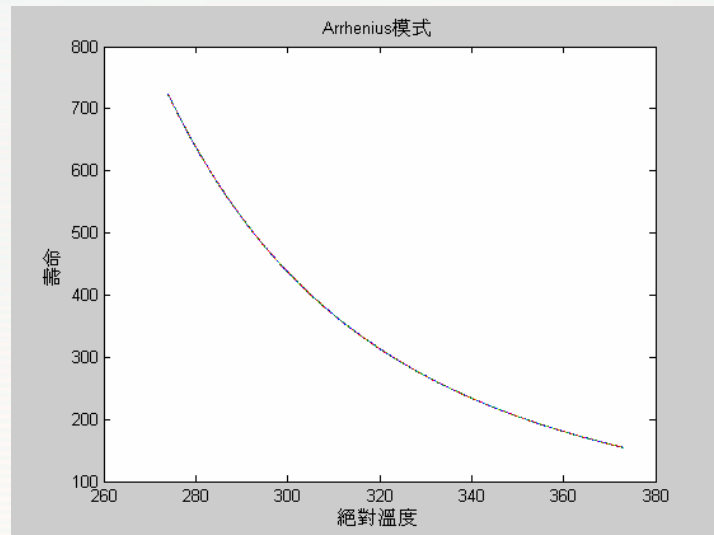
對於韋伯和指數分配而言，形狀參數是控制機率分配的形狀，而其他的機率分配，是由尺度參數控制形狀。

國立雲林科技大學 工業工程與管理所

第一版 李佩喜 編輯 2005/7/15

加速壽命試驗

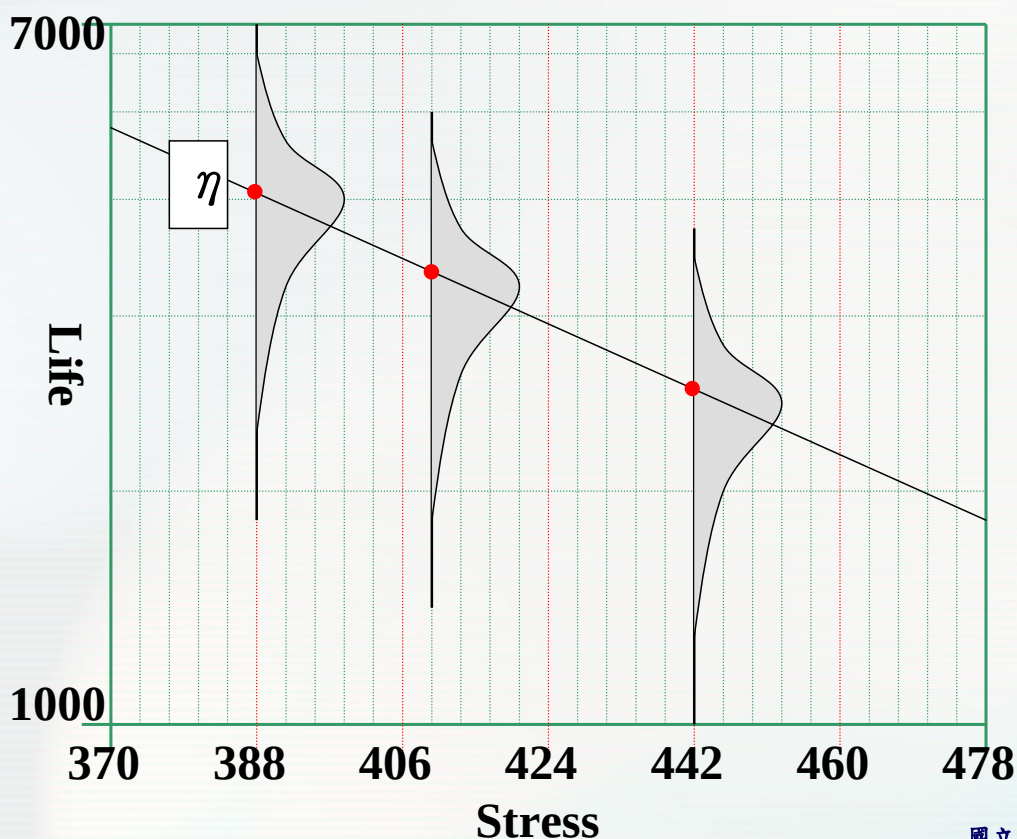
- 加速壽命試驗（ALT）：以試驗時間縮短為目的，採用比基準條件（低應力）**更嚴格**的條件（高應力）來實施的試驗。不同應力水準下的**樣本失效模式要相同**，加速性才成立。
- 應力（Stress）：外來負載之通稱，若負載超過產品所能承受的程度，產品故障。ALT中表示試驗環境值。



第一版 李佩喜 編輯 2005/7/15

加速壽命試驗

- 相同失效模式假設下，ALT會改變 η ，而不會改變 β

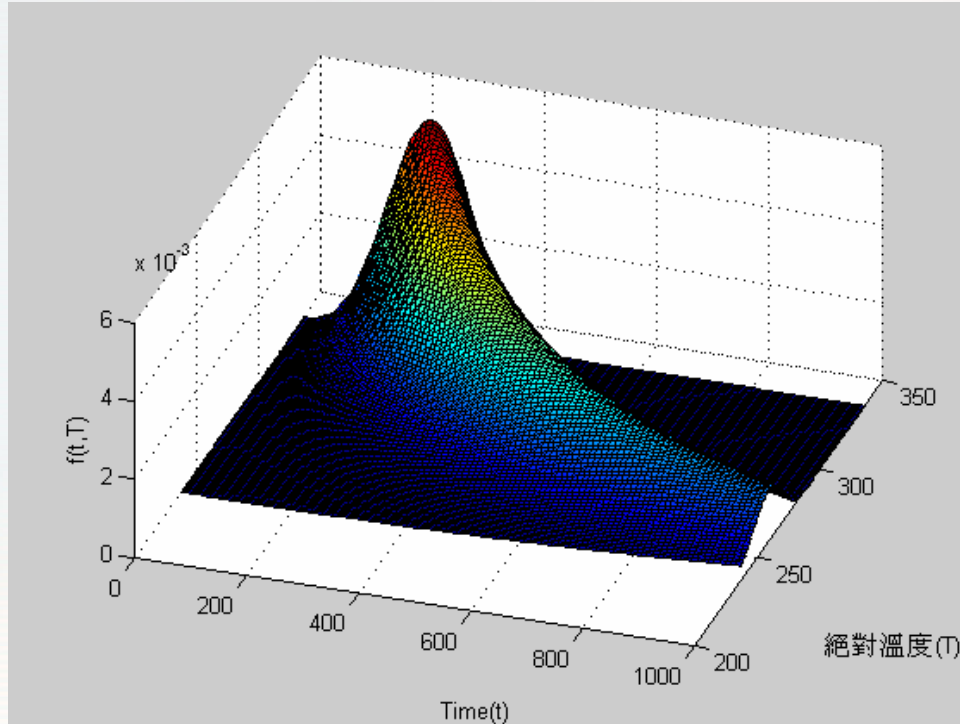


國立雲林科技大學 工業工程與管理所

第一版 李佩喜 編輯 2005/7/15

加速壽命試驗

- Arrhenius-Weibull Model



國立雲林科技大學 工業工程與管理所

第一版 李佩喜 編輯 2005/7/15

加速壽命試驗

- 每個試驗條件（應力條件）的樣本失效模式要相同，且要與正常環境的失效模式相同。
- 測試的樣本必須要相同，至少要是同質性高的樣本。
- 若每個試驗條件（應力條件）有相同的失效模式，則每個試驗條件壽命分配是會相同，且形狀參數（韋伯分配&指數分配）或尺度參數（其他分配）會是相同。
- 若在相同失效模式下，每個試驗條件的形狀參數（韋伯分配&指數分配）或尺度參數（其他分配）不相同，則必須為形狀參數或尺度參數找出共同值，並進行參數修正。

國立雲林科技大學 工業工程與管理所

第一版 李佩喜 編輯 2005/7/15

加速壽命試驗-物理統計基礎模型

$$L = Ae^{\frac{\phi}{kT^*}}$$

Arrhenius Model

$$L = \frac{1}{T^*} e^{-\left(A - \frac{\phi}{kT^*}\right)}$$

Eyring Model

$$L = Ae^{\frac{\phi}{KT^*} + \frac{\tau}{H}}$$

Temperature-Humidity Model

國立雲林科技大學 工業工程與管理所

第一版 李佩喜 編輯 2005/7/15

加速壽命試驗

- 步驟1. 實驗規劃：決定測試樣本、測試機台、測試環境變數和條件、觀察的時間點、觀察記錄方式、測試樣本數、終止試驗條件、樣本檢測方式...等，並為樣本作編號。
- 步驟2. 開始實驗、收集數據：依照樣本編號詳細記錄下測試樣本所發生的失效模式或缺陷，最好能拍照紀錄，對失效的樣本作失效分析，確定造成失效的原因。
- 步驟3. 實驗結束、整理數據：依照各失效模式區分，將各個樣本的失效時間做整理。
- 步驟4. 分析數據。

國立雲林科技大學 工業工程與管理所

第一版 李佩喜 編輯 2005/7/15

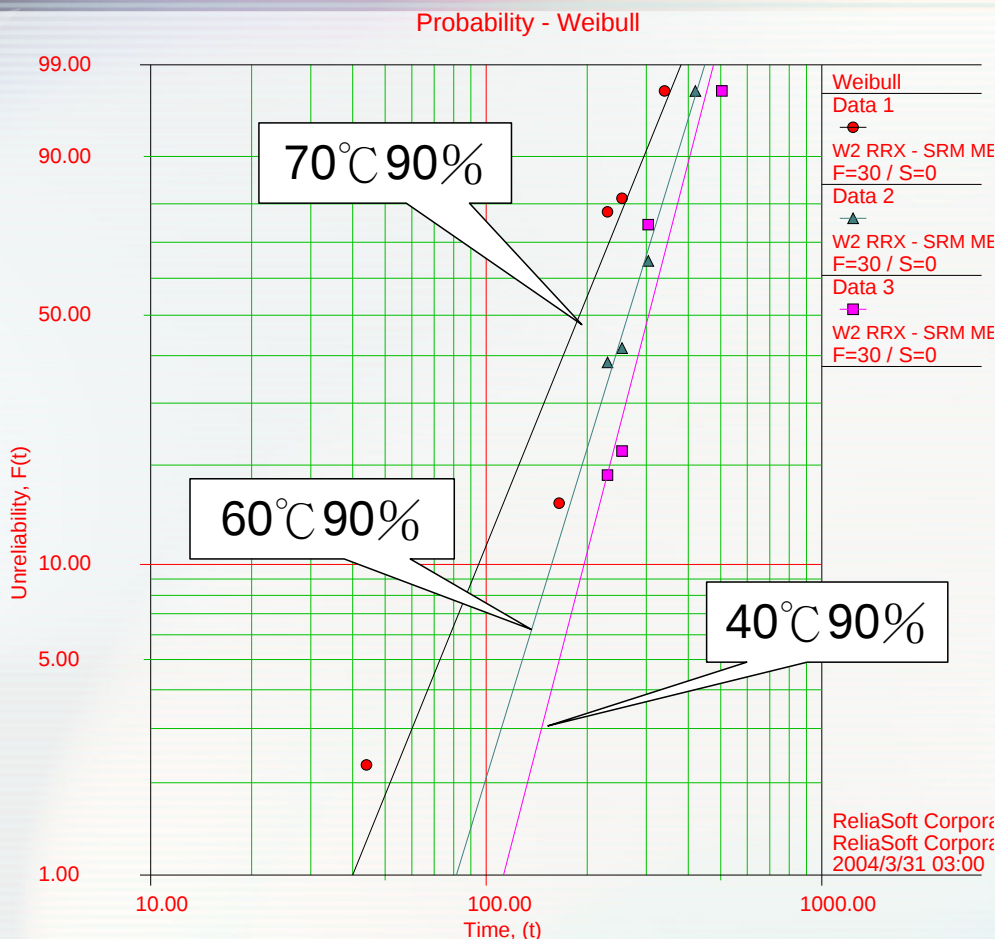
加速壽命試驗

- 步驟1. 為各個試驗條件的失效數據找到共同的失效機率分配。
- 步驟2. 依照各個試驗條件地失效數據進行參數估計。
- 步驟3. 找到共同的形狀參數或尺度參數，並進行參數修正。
- 步驟4. 特徵壽命修正。
- 步驟5. 比較修正前後的參數是否有差異性。若有差異，表示有可能樣本的失效模式是不同的。
- 步驟6. 加速壽命試驗模型的分析
- 步驟7. 壽命預測、可靠度、失效率估計。

國立雲林科技大學 工業工程與管理所

第一版 李佩喜 編輯 2005/7/15

實例說明-失效數據



國立雲林科技大學 工業工程與管理所

第一版 李佩喜 編輯 2005/7/15

實例說明-參數修正

參數	70°C 90% RH	60°C 90% RH	40°C 90% RH	平均
β	2.498	3.5332	3.7654	3.26553
θ	221.9211	293.1505	335.873	

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^n N_i \beta}{\sum_{i=1}^n N_i}$$

$$\ln \eta = \bar{X}_i - \frac{\bar{Y}_i}{\beta}$$

國立雲林科技大學 工業工程與管理所

第一版 李佩喜 編輯 2005/7/15

實例說明-參數修正

Parameters Conditions	Shape Parameter β	Characteristic Life η
70°C 90%RH	3.265533	208.5616
60°C 90%RH	3.265533	293.109
40°C 90%RH	3.265533	340.2381

國立雲林科技大學 工業工程與管理所

第一版 李佩喜 編輯 2005/7/15

實例說明-Arrhenius Model

$$L = Ae^{\frac{\phi}{k \times Tem^*}}$$

$$\ln L = \ln A + \left(\frac{\phi}{k} \right) \times \frac{1}{Tem^*}$$

令 $Y = \ln L$ 、 $\ln A = a$ 、 $b = (\phi / k)$ 、 $X = (1 / Tem^*)$

可得到 $Y = a + bX$ 直線方程式， $Tem^* = ^\circ C + 273$

國立雲林科技大學 工業工程與管理所

第一版 李佩喜 編輯 2005/7/15

實例說明-壽命與應力關係式

$$\ln L = 1592.3 \times \frac{1}{Tem^*} + 0.7799$$

$$\exp(\ln L) = \exp\left(\frac{1592.3}{Tem^*} + 0.7799\right) = \exp\left(\frac{1592.3}{Tem^*}\right) \times \exp(0.7799)$$

$$L = 2.181254 \times \exp\left(\frac{1592.3}{Tem^*}\right)$$

當濕度在90%RH時，可以用此壽命-應立關係式估計不同溫度的壽命值

國立雲林科技大學 工業工程與管理所

第一版 李佩喜 編輯 2005/7/15

The End

請多指教 謝謝

<http://campusweb.yuntech.edu.tw/~qrel/index.htm>

第一版 李佩喜 編輯 2005/7/15